



ریاضیات پارس
پ

فهرست مطالب

۱	مجموعه‌های متناهی و نامتناهی	۳
۲	تعریف دنباله	۷
۳	دنباله حسابی	۸
۴	دنباله هندسی	۱۱
۵	دایره مثلثاتی	۱۴
۶	روابط بین نسبت‌های مثلثاتی	۱۵
۷	عبارت و معادله درجه دوم	۱۶
۸	تعیین علامت	۲۴
۹	اتحادها	۲۵
۱۰	مفهوم تابع و خواص آن	۲۸
۱۱	دامنه و برد تابع	۳۳
۱۲	شمارش (ترکیب و جایگشت)	۳۴
۱۳	عبارات و معادلات گویا و گنگ	۳۷
۱۴	هندسه تحلیلی مقدماتی	۳۸
۱۵	ترکیب توابع و وارون تابع	۴۱
۱۶	تعریف لگاریتم و تابع نمایی	۴۵
۱۷	فرمول‌های لگاریتم	۴۷
۱۸	حل معادلات لگاریتمی و توانی	۴۹

۵۲	۱۹ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا
۵۵	۲۰ مفهوم حد
۵۷	۲۱ محاسبه حد و قضایای آن
۶۳	۲۲ پیوستگی
۶۹	۲۳ تابع درجه ۳
۷۰	۲۴ الگوریتم تقسیم عبارات جبری
۷۲	۲۵ تناوب و تانژانت
۷۳	۲۶ معادلات مثلثاتی
۷۶	۲۷ حد در بی نهایت
۷۷	۲۸ مجانب‌های نمودار یک تابع
۸۱	۲۹ مفهوم مشتق
۸۶	۳۰ روابط و محاسبه مشتق
۹۲	۳۱ آهنگ متوسط و لحظه‌ای تغییر
۹۵	۳۲ اکسترم‌های یک تابع
۱۰۰	۳۳ جهت تقعر یک تابع و نقطه عطف
۱۰۴	۳۴ قضایای متفرقه
۱۰۵	۳۵ احتمال
۱۱۷	۳۶ هندسه تحلیلی
۱۳۱	۳۷ ماتریس
۱۴۰	۳۸ مقدمات ریاضیات گسسته
۱۴۲	۳۹ نظریه اعداد
۱۴۷	۴۰ آمار
۱۴۸	۴۱ سؤالات اضافه شده در

فصل ۱

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱- اگر A مجموعه اعداد دورقمی و $B = \{7k : k \in A\}$ آنگاه مجموعه توانی $A \cap B$ چند عضو دارد؟

جواب:

$$A \cap B = \{70, 77, 84, 91, 98\}$$

پس

$$n(P(A \cap B)) = 2^{n(A \cap B)} = 2^5 = 32$$

۲- مجموعه A دارای ۱۴ و مجموعه B دارای ۱۷ و مجموعه $A \cap B$ دارای ۵ عضو است. تفاضل متقارن A و B چند عضو دارد؟

جواب:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \rightarrow n(A \Delta B) = n(A - B) + n(B - A) - n((A - B) \cap (B - A))$$

$$\xrightarrow{(A-B) \cap (B-A) = \emptyset} n(A \Delta B) = n(A - B) + n(B - A)$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} n(A-B)=n(A)-n(A \cap B) \\ n(B-A)=n(B)-n(A \cap B) \end{matrix}} n(A \Delta B) = (14 - 5) + (17 - 5) = 21$$

۳- مجموعه $\{a, b, \{a\}, \{b\}\}$ دارای چند زیرمجموعه شامل عضو a می‌باشد؟

جواب: کفایت به زیرمجموعه‌های $\{b, \{a\}, \{b\}\}$ در نظر بگیریم سپس عضو a را به آنها اضافه کنیم:

$$2^3 = 8$$

۴- چند عدد سه رقمی وجود دارد که نه بر ۵ تقسیم پذیر باشد و نه بر ۶؟

جواب:

$$A = \{100, \dots, 995\} = \text{اعداد سه رقمی بر } 5 \text{ بخش پذیر} := A$$

$$B = \{102, \dots, 996\} = \text{اعداد سه رقمی بر } 6 \text{ بخش پذیر}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 180 + 150 - 30 = 300$$

چون اعداد سه رقمی ۹۰۰ تا هستند پس

$$900 - 300 = 600$$

تمرین: از ۵۱ دانش آموز یک دبیرستان ۳۵ نفر در کلاس ادبیات و ۳۱ نفر در کلاس عربی و ۲۳ نفر در هر دو کلاس شرکت کرده اند. چند نفر در هیچ یک از دو کلاس شرکت نکردند؟

ریاضیات ماری

۵- تعداد زیرمجموعه های سه عضوی از مجموعه $\{a, b, c, d, e, f\}$ شامل عضو a چند است؟

جواب: کفایت از پنج عضو باقیمانده دو عضو انتخاب کنیم و در نهایت a را اضافه کنیم، پس

$$\binom{5}{2} = 10$$

۶- اگر n عدد طبیعی و $A_n = ((-1)^n n, 2n)$ باشد، چند عدد صحیح به $\bigcup_{n=1}^4 A_n$ تعلق دارد؟

جواب:

$$\bigcup_{n=1}^4 A_n = (-3, 8) \rightarrow \bigcup_{n=1}^4 A_n \cap \mathbb{Z} = \{-2, -1, \dots, 7\} \rightarrow 10 \text{ عدد صحیح}$$

تمرین: مجموعه A ، ۵ عضو بیشتر از B دارد. تعداد زیرمجموعه‌های B چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های A است؟

تمرین: اگر مجموعه A دارای ۵ عضو و مجموعه B دارای ۶ عضو و مجموعه $A \cap B$ دارای ۲ عضو باشند، مجموعه $(A \cup B)' \times (A \cap B')$ ، چند عضو دارد؟

۷- مجموعه $(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A'$ برابر چیست؟

جواب:

$$\begin{aligned}(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A' &= (A \cap B')' \cap (A \cup B) \cap A' = (A' \cup B) \cap (A \cup B) \cap A' \\ &= B \cap A' = B - A\end{aligned}$$

۸- اگر $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$ و $B = \{a, b\}$ ، مجموعه $A - \{B\}$ چند زیرمجموعه سره غیرتهی دارد؟

جواب:

$$A - \{B\} = \{a, b, \{a\}\} \rightarrow 2^{n(A - \{B\})} - 1 - 1 = 6$$

تمرین: اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند، مجموعه $[A \cup (A \cap B)]' \cap [(B \cap A) \cup (B - A)]$ را ساده کنید.

تمرین: چه تعداد از اعضای مجموعه $\{101, 102, \dots, 599, 600\}$ بر پنج بخشپذیر هستند ولی بر شش بخشپذیر هستند ولی بر پنج نه؟



فصل ۲

تعریف دنباله

۱- اگر جملات دنباله $\{\frac{3}{2^n}\}$ برای مقادیر $n \geq n_0$ در بازه $(0, 0,1875)$ قرار گیرند. کوچک‌ترین مقدار n کدام است؟

جواب:

$$0 < \frac{3}{2^n} < 0,1875 \xrightarrow{\times \frac{1}{3} \text{ دو طرف}} 0 < \frac{1}{2^n} < 0,0625 = 5^4(10^{-4}) = 2^{-4} \\ \rightarrow n > 4 \rightarrow n \geq 5$$

۲- در دنباله مثلثی با جمله اول ۱ در کدام جمله عدد مربع کامل غیر یک نوشته می‌شود؟

جواب:

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow t_{\underline{9}} = \frac{9(9)}{2} = 36 = 6^2$$

فصل ۳

دنباله حسابی

۱- در یک دنباله عددی جمله پنجم برابر ۳ و هر جمله از جمله ماقبل خود به اندازه $\frac{1}{p}$ کمتر است. مجموع ۱۰ جمله اول آن چیست؟

جواب:

$$a_5 = 3, \quad d = -\frac{1}{p} \xrightarrow{s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)} s_{10} = 5(10 - \frac{9}{p}) = 27,5$$

۲- در یک دنباله عددی با جمله اول a اگر یک واحد به قدر نسبت جملات افزوده شود آن گاه به مجموع ۲۰ جمله اول چقدر افزوده خواهد شد؟

جواب:

$$\sum_{n=0}^{19} (a + n(d+1)) - \sum_{n=0}^{19} (a + nd) = \sum_{k=1}^{19} k = \frac{19(20)}{2} = 190$$

۳- اعداد $5p-1, 3p+4, 2p+3$ سه جمله متوالی یک دنباله عددی هستند. قدر نسبت این دنباله چند است؟

جواب:

$$\frac{5p-1 + (2p+3)}{2} = 3p+4 \rightarrow 7p+2 = 6p+8 \rightarrow p = 6 \xrightarrow{3p+4-(2p+3)=d} d = 7$$

تمرین: مجموع اعداد طبیعی فرد بخش پذیر بر ۳ و کوچکتر از ۱۰۱، چند است؟

۴- مجموع تمام اعداد طبیعی بخش پذیر بر ۶ بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰ کدام است؟

جواب:

$$\begin{aligned} 102 + 108 + \dots + 198 &= \frac{198 - 102}{6} + 1 = 17 \\ &\rightarrow 17 \left(\frac{198 + 102}{2} \right) \\ &= 17(150) = 2550. \end{aligned}$$

۵- در یک دنباله حسابی، جملات سوم، هفتم و نهم، می توانند سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند. چندمین جمله این دنباله، صفر است؟

جواب:

قدر نسبت دنباله هندسی q ، اختلاف مشترک دنباله حسابی d ، جمله اول دنباله حسابی a

$$\frac{(a + 8d) - (a + 6d)}{(a + 6d) - (a + 2d)} = \frac{aq^2 - aq}{aq - a} = \frac{aq(q - 1)}{a(q - 1)} = q \rightarrow \frac{2d}{4d} = \frac{1}{2} = q$$

$$\frac{a + 6d}{a + 2d} = \frac{1}{2} \rightarrow 2a + 12d = a + 2d \rightarrow a + (11 - 1)d = 0$$

۶- در یک دنباله حسابی جمله n -ام به صورت $a_n = \frac{3}{2}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جمله اول این دنباله چند است؟

جواب:

$$a_n = \frac{3}{2}n - 5 \rightarrow d = \frac{3}{2}, a_1 = \frac{-7}{2}$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} \left(2 \left(\frac{-7}{2} \right) + 14 \left(\frac{3}{2} \right) \right) = 105$$

۷- در یک دنباله حسابی مجموع جملات چهارم، هفتم، سیزدهم و شانزدهم برابر ۴۰ است. جمله دهم این دنباله چند است؟

جواب:

$$\begin{aligned} a_4 + a_7 + a_{13} + a_{16} &= 40 \xrightarrow{a_m = a_n + (m-n)d} a_{10} - 6d + a_{10} - 3d + a_{10} + 3d + a_{10} + 6d = 40 \\ 4a_{10} &= 40 \rightarrow a_{10} = 10 \end{aligned}$$

تمرین: در یک دنباله حسابی اختلاف جمله $(2n - 1)$ -ام با جمله $(3n)$ -ام چهار برابر اختلاف مشترک است. n چند است؟



فصل ۴

دنباله هندسی

۱- حاصل $(1 + x + x^2 + \dots + x^8)(1 - x + x^2 - \dots + x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ چند است؟
جواب:

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^8)(1 - x + x^2 - \dots + x^8) = \frac{x^9 - 1}{x - 1} \left(\frac{x^9 + 1}{x + 1} \right) = \frac{x^{18} - 1}{x^2 - 1}$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt{2}} = \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 511$$

۲- در یک دنباله هندسی مجموع هشت جمله‌ی اول $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله اول آن است، جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟

جواب:

$$\frac{\sum_{n=1}^8 ar^{n-1}}{\sum_{n=1}^4 ar^{n-1}} = \frac{\frac{a(r^8-1)}{r-1}}{\frac{a(r^4-1)}{r-1}} = \frac{r^8-1}{r^4-1}$$

$$= \frac{(r^4-1)(r^4+1)}{r^4-1} = r^4+1 = \frac{5}{4} \rightarrow r = \sqrt[4]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{ar^6}{a} = r^6 = (r^2)^3 = \frac{1}{8}$$

۳- دنباله هندسی $\dots, \frac{1}{2}, x, 2$ غیرنزولی است. مجموع شش جمله اول آن چیست؟

جواب:

$$r^2 = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \xrightarrow{r < 0 \rightarrow \text{غیرنزولی}} r = -\frac{1}{2}$$

$$S_6 = \frac{2(1 - (-\frac{1}{2})^6)}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{21}{16}$$

تمرین: تعداد $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b$ سه جمله متوالی از دنباله هندسی اند، واسطه عددی a و b چند است؟

۴- در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن ۳ می باشد. مجموع شش جمله اول آن چند است؟

جواب:

$$a_1 + a_3 = \frac{a_1(r^3 - 1)}{r^3 - 1} = 1 \rightarrow a_1(r^3 + 1) = 1, S_4 = \frac{a_1(r^4 - 1)}{r - 1} = 3$$

$$\rightarrow a_1(r^3 + 1)(r + 1) = 3$$

$$\rightarrow r = 2, a_1 = \frac{1}{5} \rightarrow S_6 = \frac{\frac{1}{5}(2^6 - 1)}{2 - 1} = \frac{63}{5} = 12,6$$

تمرین: در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول آن ۱۵۳ می باشد. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟

۵- حد مجموع جملات دنباله هندسی $\dots, \frac{9}{4}, 6, 18$ چند است؟

جواب:

$$S = \frac{a_1}{1-r} \xrightarrow[r=\frac{3}{4}, a_1=18]{} S = \frac{18}{\frac{1}{4}} = 72$$

۶- در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصلضرب آنها ۲۱۶ می باشد. تفاضل کوچکترین و بزرگترین این سه عدد چند است؟

جواب:

$$a(ar)(ar^2) = a^3 r^3 = (ar)^3 = 216 = 6^3 \rightarrow ar = 6$$

$$a+ar+ar^2 = 19 \xrightarrow{ar=6} \frac{6}{r} + 6 + 6r = 19 \rightarrow \frac{6}{r} + 6r = 13 \rightarrow 6r^2 - 13r + 6 = 0 \rightarrow r = \frac{3}{2} \text{ یا } r = \frac{2}{3}$$

$$|a - ar^2| = \left| \frac{6}{r} - 6r \right| \xrightarrow{\text{در هر دو حالت}} \left| \frac{6}{r} - 6r \right| = 5$$

ریاضیات پاری

فصل ۵

دایره مثلثاتی



فصل ۶

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

۱- اگر $\tan ۲۰^\circ = ۰٫۳۶$ حاصل $\frac{\sin ۱۶۰^\circ - \cos ۲۰۰^\circ}{\cos ۱۱۰^\circ + \sin ۷۰^\circ}$ چند است؟
جواب:

$$\frac{\sin ۱۶۰^\circ - \cos ۲۰۰^\circ}{\cos ۱۱۰^\circ + \sin ۷۰^\circ} = \frac{\sin ۲۰^\circ - (-\cos ۲۰^\circ)}{-\cos ۷۰^\circ + \sin ۷۰^\circ} = \frac{\sin ۲۰^\circ + \cos ۲۰^\circ}{-\sin ۲۰^\circ + \cos ۲۰^\circ}$$

$$= \frac{\frac{\sin ۲۰^\circ + \cos ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}}{\frac{-\sin ۲۰^\circ + \cos ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}} = \frac{\tan ۲۰^\circ + ۱}{-\tan ۲۰^\circ + ۱} = \frac{۱٫۳۶}{۰٫۶۴} = \frac{۱۷}{۸}$$

۲- خلاصه شده عبارت $\sin(\frac{\pi}{۲} + \alpha) \sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha) \cos(-\alpha)$ چیست؟
جواب:

$$\begin{aligned} \sin(\frac{\pi}{۲} + \alpha) \sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha) \cos(-\alpha) &= (\cos \alpha)(-\sin \alpha) - (\sin \alpha)(\cos \alpha) \\ &= -۲ \sin \alpha \cos \alpha = -\sin ۲\alpha \end{aligned}$$

تمرین: حاصل عبارت $\cos^۲ \theta (۱ + ۲ \tan^۲ \theta) + (\cos \theta - ۱)(\cos \theta + ۱)$ چند است؟

فصل ۷

عبارت و معادله درجه دوم

به ازای کدام مقادیر a معادله درجه دوم $2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟

جواب:

$$\begin{aligned} \text{دارای دو ریشه حقیقی} &\rightarrow \Delta > 0 \rightarrow a^2 - 4(2)(a - \frac{3}{2}) > 0 \\ &\rightarrow a^2 - 8a + 12 > 0 \quad \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (a-2)(a-6) > 0 \\ &\quad (-2) + (-6) = -8, (-2)(-6) = +12 \\ &\rightarrow a \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty). \end{aligned}$$

۲- جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x - \cos x - 3 = 0$ کدام است؟

$$\begin{aligned} \text{به روش دلتا} &\xrightarrow{\cos x = t} 2t^2 - t - 3 = 0 \rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \\ &\rightarrow t = \frac{3}{2} \text{ یا } t = -1 \quad \xrightarrow{-1 \leq \cos x \leq +1} \cos x = -1 \\ &\rightarrow x = 2k\pi + \pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

۳- به ازای کدام مقدار m نمودار تابع با ضابطه $y = (m-2)x^2 - 3x + m + 2$ بالای محور x ها و مماس بر آن است؟

جواب:

$$\xrightarrow{\Delta=0 \rightarrow \text{مماس بر محور } x \text{ ها}} (-3)^2 - 4(m-2)(m+2) = 0 \rightarrow 4m^2 = 25 \rightarrow m = \frac{5}{2} \text{ یا } m = -\frac{5}{2}$$

$$\frac{m-2 > 0 \rightarrow m > 2 \rightarrow \text{بالای محور } x \text{ ها}}{m = \frac{5}{2}}$$

۴- در معادله $3x^2 - 15x + m = 0$ اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه دیگر بیشتر باشد m کدام است؟

جواب: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های این معادله باشند طبق فرض $x_2 = x_1 + 2$ پس

$$x_1 + x_2 = 2x_1 + 2 = \frac{15}{3} = 5 \rightarrow x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{7}{2}$$

$$\frac{(x_1)(x_2) = \frac{m}{3}}{m = \frac{63}{4}}$$

تمرین: به ازای کدام مقدار m عدد $\frac{1}{8}$ واسطه‌ی عددی بین دو ریشه حقیقی معادله‌ی $(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0$ است؟

۵- اگر هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + ax + b = 0$ ، دو برابر معکوس هر ریشه از معادله‌ی $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد، a چند است؟

جواب: ریشه‌های معادله معلوم را α و β در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{-7}{4} = \frac{7}{4}, \quad \alpha\beta = \frac{3}{4}$$

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{14}{3} = -\frac{a}{3} \rightarrow a = -14$$

دقت کنید با حفظ کردن فرمول ساخت معادله با ریشه‌های معکوس و... این سؤال سریع‌تر نیز حل می‌شد.

۶- اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه دوم $y = (a - 1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

جواب:

$$\frac{-1}{2(a-1)} = 2 \rightarrow a = \frac{3}{4} \rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$$

به روش دلتا $\xrightarrow{x > 0} x = 6$ یا $x = -2$

۷- اگر $x = 4$ یکی از جواب‌های معادله‌ی $x + a = \sqrt{5x - x^2}$ باشد، جواب دیگر آن چند است؟

جواب:

$$\xrightarrow{x=4} 4 + a = \sqrt{5(4) - 4^2} = 2 \rightarrow a = -2$$

طرفین به توان دو $x - 2 = \sqrt{5x - x^2} \xrightarrow{\text{طرفین به توان دو}} (x - 2)^2 = 5x - x^2 \rightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0$

جواب دیگر ندارد. $\xrightarrow{\sqrt{5x-x^2} \geq 0} 2(x-4)(x-\frac{1}{2}) = 0$

۸- ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + ax + = 0$ ، یک واحد از ریشه‌های معادله $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیشتر است، b چند است؟

جواب:

$$3(x-1)^2 + 7(x-1) + 1 = 3x^2 + x - 3 = 0 \rightarrow x^2 + \frac{1}{3} - 1 = 0 \rightarrow b = -1$$

تمرین: اگر منحنی به معادله‌ی $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ ، محور x ها را در دو نقطه با طولهای مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر m چیست؟

۹- در معادله $3x^2 - 17x + m = 0$ یک ریشه از سه برابر ریشه‌ی دیگر 3 واحد بیشتر است، m چند است؟

جواب:

$$\alpha + \beta = \frac{17}{3}, \beta = 3\alpha + 3 \rightarrow \alpha = \frac{2}{3}, \beta = 5$$

$$\alpha\beta = \frac{m}{3} \rightarrow m = 1 \circ$$

۱۰- به ازای کدام مقادیر m ، از معادله $mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x حاصل می‌شود؟

جواب:

$$\Delta \geq 0, t := \sqrt{x} \geq 0 \rightarrow 9 - 4m(m - 2) \geq 0 \rightarrow -4m^2 + 8m + 9 \geq 0$$

$$\rightarrow m \in \left[1 - \frac{\sqrt{13}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{13}}{2}\right] \supseteq (0, 2)$$

$$\xrightarrow[t := \sqrt{x} \geq 0]{\text{فقط یک جواب}} \alpha\beta = \frac{m - 2}{m} < 0 \rightarrow 0 < m < 2$$

تمرین: اگر جزء صحیح $(x^2 + x)$ برابر ۱- باشد، آنگاه $[x^{2^0}]$ چند است؟

ریاضیات پاری

تمرین: منحنی به معادله $y = (2x + 1)(x + 8)$ با خطوط $y = mx$ نقطه مشترک ندارد مجموعه مقادیر m چیست؟

راهنمایی:

$$(2x + 1)(x + 8) = mx \rightarrow (2x + 1)(x + 8) - mx = 0$$

تمرین: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax + b$ و خط به معادله $y = -2x + b$ در نقطه‌ای به طول 1 روی محور x ها متقاطع‌اند. طول‌های دو نقطه تقاطع دیگر این منحنی و خط چیست؟

۱۱- به ازای کدام مقادیر a منحنی به معادله $y = ax^2 - (a+2)x$ از ناحیه دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

جواب: باید ریشه‌های آن نامنفی و $a < 0$ ، پس:

$$ax^2 - (a+2)x = x(ax - (a+2)) \rightarrow x = 0 \text{ یا } x = \frac{a+2}{a}$$

$$\frac{a+2}{a} \geq 0 \xrightarrow{a < 0} a \leq -2$$

۱۲- در توزیع یک کالا، معادله تقاضا به صورت $x = 7500 - 450P$ مدلسازی شده است: x تعداد واحد کالا و P قیمت هر واحد کالا است. بیشترین درآمد از فروش کالا چند است؟

جواب:

$$\max\{Px : x \in \mathbb{N}\} = \max\left\{x\left(\frac{x - 7500}{-450}\right) : x \in \mathbb{N}\right\} = 3750 \left(\frac{3750 - 7500}{-450}\right) = 31250$$

دقت کنید برای بدست آوردن نقطه اکسترمم در یک عبارت درجه دوم کافی است میانگین دو ریشه را جایگذاری کنیم.

۱۳- نقطه‌ی $A(-1, -4)$ رأس سهمی به معادله‌ی $y = 3x^2 + ax + b$ است. این سهمی محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

جواب:

$$-1 = \frac{-a}{6} \rightarrow a = 6 \xrightarrow{3(-1)^2 + 6(-1) + b = -4} b = -1 \rightarrow y_0 = 3(0)^2 + 6(0) + (-1) = -1$$

تمرین: مجموع ریشه‌های حقیقی معادله $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ ، چند است؟

راهنمایی: معادله را با تغییر متغیر $t := x^2 + x$ حل کنید و سپس ریشه‌های حقیقی x را بیابید.

۱۴- اگر a, b ریشه‌های حقیقی $x^2 - kx + 1 = 0$ باشند و $(a^b)(b^a) = b^3$ باشد k^2 چند است؟ ($a \neq b$)

جواب:

$$ab = 1 \implies a = \frac{1}{b}$$

با جایگذاری در فرض سوال داریم:

$$\left(\frac{1}{b}\right)^b (b^a) = b^{-b} (b^a) = b^{a-b} = b^3$$

پس

$$\frac{a \neq b \implies b \neq \pm 1}{b \neq 0} \rightarrow a - b = 3 \implies \frac{\sqrt{\Delta}}{|1|} = \sqrt{\Delta} = 3$$

$$k^2 - 4 = 9 \implies k^2 = 13$$

۱۵- اگر $x^3 = \sqrt{5} + 2$ باشد، $x^2 + \frac{1}{x^2}$ چند است؟

جواب:

$$x^3 = \sqrt{5} + 2 \implies 8x^3 = 8\sqrt{5} + 16 = (\sqrt{5} + 1)^3$$

پس

$$2x = \sqrt{5} + 1 \implies x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \implies x^2 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}$$

بنابراین با گویا کردن مخرج داریم:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} + \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

۱۶- اگر a و b ریشه‌های معادله $x^2 - 4cx + 5 = 0$ باشند و d ریشه‌های معادله زیر باشند:

$$x^2 - (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})x + 7 + 3\sqrt{3}c = 0$$

اگر $c > 0$ و $b + d = 3\sqrt{2}$ باشد، مقدار $(a + 2b + d)^2$ چند است؟

جواب:

$$a + b = 4c, \quad ab = 5$$

$$a + d = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}, \quad ad = 7 + 3\sqrt{3}$$

پس

$$a + b + a + d = 4c + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$$

و چون $b + d = 3\sqrt{2}$ ، در نتیجه داریم:

$$2a = 4c + 2\sqrt{3} \implies a = 2c + \sqrt{3}, \quad b = 2c - \sqrt{3}$$

$$ab = 5 \implies 4c^2 - 3 = 5 \xrightarrow{c>0} c = \sqrt{2}$$

$$(a + 2b + d)^2 = (a + b + b + d)^2 = (4\sqrt{2} + 3\sqrt{2})^2 = (7\sqrt{2})^2 = 98$$

۱۷- اگر $28 = (4x^2 + 6x + 4)(4y^2 - 12y + 25)$ ، $x, y \in \mathbb{R}$ باشد، حاصل $8xy$ چند است؟

جواب:

با بدست آوردن کمترین مقدار این عبارات درجه دوم داریم:

$$4x^2 + 6x + 4 \geq \frac{7}{4}, \quad 4y^2 - 12y + 25 \geq 16 \implies (4x^2 + 6x + 4)(4y^2 - 12y + 25) \geq 28$$

$$\xrightarrow{(4x^2 + 6x + 4)(4y^2 - 12y + 25) = 28} x = \frac{-3}{4}, \quad y = \frac{3}{2} \implies 8xy = -9$$

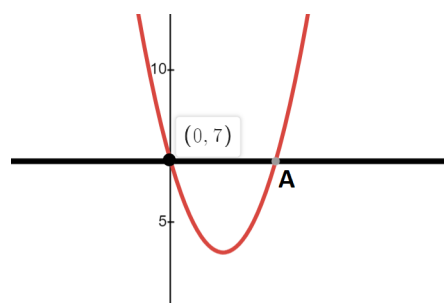
۱۸- اگر $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a^2 + 2b = 7, b^2 + 4c = -7, c^2 + 6a = -14$ باشد، abc چند است؟

جواب:

$$a^2 + 6a + b^2 + 2b + c^2 + 4c = -14 \implies (a+3)^2 + (b+1)^2 + (c+2)^2 = 0$$

$$\implies a = -3, b = -1, c = -2 \implies abc = -6$$

۱۹- در نمودار سهمی زیر که مربوط به تابع $f(x) = x^2 + bx + c$ است، اگر فاصله نقطه معلوم تا A برابر فاصله نقطه معلوم تا رأس سهمی باشد. طول رأس سهمی چند است؟



جواب:

$$f(x) = (x - h)^2 + k$$

که در آن (h, k) نقطه رأسی و $x = h$ خط تقارن است. پس

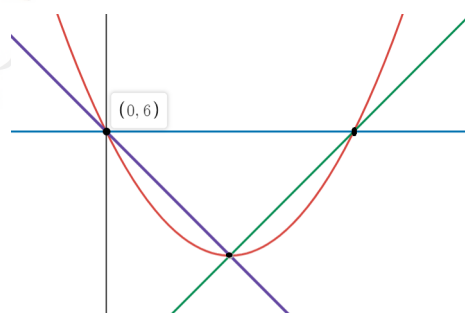
$$\begin{cases} h^2 + k = 7 \\ (2h)^2 = h^2 + (7 - k)^2 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$h = \sqrt{3}, k = 4$$

پس طول رأس سهمی برابر $\sqrt{3}$ است.

۲۰- شکل زیر مربوط به نمودار یک تابع بصورت $f(x) = x^2 + bx + c$ می‌باشد. اگر مساحت مثلث با سه رأس مشخص شده برابر یک باشد، طول رأس این نمودار برابر چند است؟ ((شکل دقیق رسم شده است.))



جواب:

$$f(x) = (x - h)^2 + k \implies f(0) = h^2 + k = 6$$

حال با رسم ارتفاع مثلث از رأس سهمی داریم:

$$2h(6 - k) = 2$$

حال داریم:

$$\begin{cases} h^2 + k = 6 \\ 2h(6 - k) = 2 \end{cases}$$

و این نتیجه می‌دهد:

$$h = 1, k = 5$$

فصل ۸

تعیین علامت

۱- جواب نامعادله $-1 \leq 3x - 2 \leq 1$ چیست؟

جواب:

$$-1 \leq 3x - 2 \leq 1 \xrightarrow{+2} 1 \leq 3x \leq 3 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} \frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

۲- مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-3}$ به کدام صورت است؟

جواب:

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3} > 0 \rightarrow \frac{x-3-(x-1)}{(x-1)(x-3)} \rightarrow \frac{-2}{(x-1)(x-3)} > 0$$

با تعیین علامت

$$\longrightarrow 1 < x < 3$$

تمرین: مقادیر تابع $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 6$ در بازه (a, b) بزرگتر از $\frac{7}{4}$ می باشد. بیشترین مقدار $b - a$ چند است؟

فصل ۹

اتحادها

۱- اگر $ab = a - b$ و $a, b \in \mathbb{R} - \{-1, 0, +1\}$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = ?$$

جواب:

$$\begin{aligned} b + ab = a &\rightarrow b = \frac{a}{1+a} \rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = 1 + a + \frac{1}{1+a} - \frac{a^2}{1+a} \\ &= \frac{(1+a)(1+a) + 1 - a^2}{1+a} = \frac{1 + 2a + a^2 + 1 - a^2}{1+a} = \frac{2 + 2a}{1+a} = 2 \end{aligned}$$

۲- اگر $x^2 + 3x = 7 + \frac{6}{x}$ و $x \notin \{0, 2\}$

$$(1+x)(2+x)(3+x)(4+x) = ?$$

جواب:

$$x^2 + 3x = 7 + \frac{6}{x} \rightarrow x^3 + 3x^2 - 7x - 6 = 0 \rightarrow (x-2)(x^2 + 5x + 3) = 0$$

$$\frac{x-2 \neq 0}{\rightarrow} x^2 + 5x + 3 = 0 \rightarrow x^2 + 5x = -3$$

$$(1+x)(2+x)(3+x)(4+x) = (1+x)(4+x)(2+x)(3+x)$$

$$= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = (+1)(+3) = 3$$

$$۳- \text{اگر } \sqrt{۳} = ۲ + \frac{1}{۲x} + ۳x.$$

$$۶x^۲ + \frac{1}{۶x^۲} = ?$$

جواب:

$$\left(۳x + \frac{1}{۲x}\right)^۲ = ۹x^۲ + ۲(۳x)\left(\frac{1}{۲x}\right) + \frac{1}{۴x^۲} = ۹x^۲ + ۳ + \frac{1}{۴x^۲} = (۲\sqrt{۳})^۲ = ۱۲$$

$$\xrightarrow{(-۳) + \text{دو طرف}} ۹x^۲ + \frac{1}{۴x^۲} = ۹ \xrightarrow{\times \frac{۶}{۹} \text{ دو طرف}} ۶x^۲ + \frac{1}{۶x^۲} = ۶$$

$$۴- \text{اگر } \frac{۸^x + ۲۷^x}{۱۲^x + ۱۸^x} = \frac{۷}{۶}$$

$$x^۲ = ?$$

جواب:

$$\frac{۸^x + ۲۷^x}{۱۲^x + ۱۸^x} = \frac{۸^x + ۲۷^x}{۶^x(۲^x + ۳^x)} = \frac{(۲^x)^۳ + (۳^x)^۳}{۶^x(۲^x + ۳^x)}$$

$$m := ۲^x, \quad n := ۳^x \quad (۶^x = (۲^x)(۳^x) = mn)$$

$$\frac{۸^x + ۲۷^x}{۱۲^x + ۱۸^x} = \frac{m^۳ + n^۳}{mn(m+n)}$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}} \frac{(m+n)(m^۲ - mn + n^۲)}{mn(m+n)} = \frac{۷}{۶} \rightarrow \frac{m^۲ - mn + n^۲}{mn} = \frac{۷}{۶}$$

$$\rightarrow ۶m^۲ - ۱۳mn + ۶n^۲ = ۰ \rightarrow (۲m - ۳n)(۳m - ۲n) = ۰ \rightarrow ۲m - ۳n = ۰ \text{ یا } ۳m - ۲n = ۰$$

$$\frac{m}{n} = \frac{۳}{۲} \text{ یا } \frac{m}{n} = \frac{۲}{۳} \rightarrow x = -۱ \text{ یا } x = +۱ \rightarrow x^۲ = ۱$$

$$۵- اگر $a + \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ و $(a + a^۲ + a^۳) + (\frac{1}{a} + \frac{1}{a^۲} + \frac{1}{a^۳}) = ۲۸$$$

$$(۲a - ۳)^۲ = ?$$

جواب:

$$(a + \frac{1}{a}) + (a^۲ + \frac{1}{a^۲}) + (a^۳ + \frac{1}{a^۳}) = ۲۸$$

$$\rightarrow (a + \frac{1}{a}) + ((a + \frac{1}{a})^۲ - ۲(a)(\frac{1}{a})) + ((a + \frac{1}{a})^۳ - ۳(a)(\frac{1}{a})(a + \frac{1}{a}))$$

$$(a)(\frac{1}{a}) = ۱$$

$$\xrightarrow{t := a + \frac{1}{a}} t + t^۲ + t^۳ - ۳t - ۲ = ۲۸$$

$$\rightarrow t^۳ - ۲۷ + t^۲ - ۲t - ۳ = ۰$$

اتحاد چاق و لاغر

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (t - ۳)(t^۲ + ۳t + ۹) + (t - ۳)(t + ۱) = ۰$$

$$\rightarrow (t - ۳)(t^۲ + ۴t + ۱۰) = ۰ \xrightarrow{t \in \mathbb{R}} t = ۳ \rightarrow a + \frac{1}{a} = ۳$$

$$\rightarrow a^۲ - ۳a = -۱ \rightarrow (۲a - ۳)^۲ = ۴(a^۲ - ۳a) + ۹ = ۵$$

تمرین:

$$\frac{1 + \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{1 + \sqrt{1 + \frac{\sqrt{۳}}{۲}}} + \frac{1 - \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{۳}}{۲}}}$$

راهنمایی: $(1 \pm \frac{\sqrt{۳}}{۲}) = (\frac{1}{۲} \pm \frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲$

فصل ۱۰

مفهوم تابع و خواص آن

۱- اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x}$ ، آن گاه $f(8)$ چند است؟

جواب:

$$f(8) = 3 + \sqrt{2(8)} = 3 + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

۲- مقدار $f(f(-144))$ ، مقدار $f(x) = \sqrt{x + 2|x|} - 2$ چند است؟

جواب:

$$\begin{aligned} f(f(-144)) &= f(\sqrt{-144 + 2|-144|}) = f(\sqrt{-144 + 2(144)}) = f(\sqrt{144}) = f(12) \\ &= \sqrt{36} = 6 \end{aligned}$$

۳- تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با کدام ضابطه یک به یک و پوشاست؟

یک به یک نیست. $f(x) = x - |x| \xrightarrow{f(0) = f(1) = 0}$

یک به یک نیست. $f(x) = x + |x| \xrightarrow{f(0) = f(-1) = 0}$

یک به یک است. $f(x) = x|x| \rightarrow$

یک به یک نیست. $f(x) = \frac{x}{|x|} \xrightarrow{f(2) = f(1) = 1}$

۴- در بازه‌ای، مقادیر تابع با ضابطه $y = x^2$ کمتر از مقادیر تابع با ضابطه $y = |x - 2|$ است، آن بازه چیست؟

جواب:

$$x^2 < |x - 2| \xrightarrow{x < 2} x^2 < -x + 2 \rightarrow x^2 + x - 2 < 0 \rightarrow (x + 2)(x - 1) < 0 \\ \rightarrow x \in (-2, 1) \cap (-\infty, 2) = (-2, 1)$$

$$x^2 < |x - 2| \xrightarrow{x \geq 2} x^2 < x - 2 \rightarrow x^2 - x + 2 < 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x - 2)(x + 1) < 0 \\ \rightarrow x \in (-1, 2) \cap (2, +\infty) = \emptyset$$

پس:

$$x \in (-2, 1)$$

۵- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = |x + 2| + a|x - 2|$ زوج است؟

جواب:

$$\xrightarrow{\text{تابع زوج باشد.}} f(2) = f(-2) \rightarrow f(2) = |4| + a|0| = |0| + a|-4| \xrightarrow{\text{تعریف قدر مطلق}} 4 = 4a \\ \rightarrow a = 1$$

و چون به ازای $a = 1$ تابع زوج است پس $a = 1$ جواب است.

۶- اگر $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$ و $x > 0$ ، آنگاه ضابطه $g^{-1} \circ f^{-1}$ چیست؟

جواب:

$$g(x) = x^2 \xrightarrow{x > 0} g^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

و

$$f(x) = 1 + \sqrt{x} \xrightarrow{x > 0} (f(x) - 1)^2 = x \rightarrow f^{-1}(x) = (x - 1)^2$$

پس

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}((x - 1)^2) = x - 1$$

۷- در بازه $[x_0, +\infty)$ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}x + 2$ بالاتر از خط به معادله $y = 3(x - 1)$ قرار نمی‌گیرد. کمترین مقدار $f(x_0)$ کدام است؟

جواب: کمترین مقدار $f(x_0)$ به ازای کمترین مقدار x_0 بدست می‌آید، پس:

$$3(x - 1) \geq \frac{1}{x}x + 1 \rightarrow x \geq 2 \rightarrow f(x) \geq \frac{1}{2}(2) + 2 = 3$$

۸- اگر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $y = 2x + b$ و $y = ax^2 + bx - 3$ روی محور x ها در نقطه‌ای به طول -1 متقاطع باشند، a چند است؟

جواب:

$$\xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها } (y=0)]{x=-1} 2(-1) + b = 0 \rightarrow b = 2$$

$$a(-1)^2 + 2(-1) - 3 = a - 5 = 0 \rightarrow a = 5$$

۹- با توجه به ماشین $x \rightarrow \underline{g} \rightarrow \underline{f} \rightarrow x$ اگر $f(x) = 2x - 1$ ، آنگاه $g(0)$ چند است؟

جواب:

$$(f \circ g)(x) = x \rightarrow g(x) = \frac{x+1}{2} \rightarrow g(0) = \frac{1}{2}$$

۱۰- تابع فرد f وارون‌پذیر است، نمودار تابع f^{-1} نسبت به چه خط یا نقطه‌ای متقارن است؟
جواب: f^{-1} در این حالت نسبت به مرکز مختصات متقارن است.

تمرین: نمودار تابع $y = x - [x] : x \in [-2, 3]$ از n پاره‌خط مساوی به اندازه L تشکیل شده است. دوتایی مرتب (n, L) چیست؟

ریاضیات پاری

تمرین: منحنی به معادله $(x^2 - ax + a)(x - 1) = 0$ محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند، مجموعه مقادیر a به کدام صورت است؟

۱۱- تابع با ضابطه‌ی $y = ax + b + \frac{2x^2}{x+1}$ تابع هموگرافیکی است که محور x ها را در نقطه $x = 1$ قطع می‌کند. b چند است؟

جواب:

$$\xrightarrow[\frac{2x^2+2x}{x+1}=2x]{y=ax+b+\frac{2x^2+2x-2x}{x+1}=y=ax+b+\frac{2x^2+2x}{x+1}-\frac{2x}{x+1}} a = -2$$

$$\xrightarrow{x=1} -2(1) + b + \frac{2(1)^2}{1+1} = -2 + b + 1 = 0 \rightarrow b = 1$$

۱۲- در ازای کدام مقدار a منحنی به معادله $y = x^2 + 5x + 4$ بر نیمساز ناحیه اول مماس است؟

جواب:

$$\xrightarrow{(y=x) \rightarrow \text{نیمساز ناحیه اول}} ax = x^2 + 5x + 4 \rightarrow x^2 + (5-a)x + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=0 \rightarrow \text{یک ریشه دارد.}} \Delta = (5-a)^2 - 16 = 0 \rightarrow a = 1 \text{ یا } a = 9$$

با رسم متوجه می شویم:

$$a = 9$$

تمرین: به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع $y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ همواره در زیر محور x ها است؟

تمرین: تابع با ضابطه $y = ax + b + \frac{x^2}{x-1}$ هموگرافیکی است که محور y ها را در نقطه ای به عرض ۱ قطع می کند. $a+b$ چند است؟

$$13- \text{تابع با ضابطه } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; x \geq 0 \\ 1 - x^2 & ; x < 0 \end{cases} \text{ بر روی مجموعه اعداد حقیقی چگونه}$$

است؟

جواب: داریم:

$$f(1) = f(-1) = 0 \rightarrow \text{یک به یک نیست.}$$

$$\begin{cases} \forall y \geq 0 \exists x \geq 0 : y = x^2 - 1 \\ \forall y < 0 \exists x < 0 : y = 1 - x^2 \end{cases} \rightarrow \text{پوشا است.}$$

۱۴- اگر $f(x) = \frac{2x^2+2}{x^2-3}$ باشد، مقدار $f(2 - \sqrt{3})$ چند است؟

جواب:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6 + 8}{x^2 - 3} = 2 + \frac{8}{x^2 - 3} \rightarrow f(2 - \sqrt{3}) = 2 + \frac{8}{(2 - \sqrt{3})^2 - 3}$$

$$= 2 + \frac{8}{4 - 4\sqrt{3}} = 2 + \frac{8(4 + 4\sqrt{3})}{-32} = 2 - \frac{32 + 32\sqrt{3}}{32} = 2 - (1 + \sqrt{3}) = 1 - \sqrt{3}$$



فصل ۱۱

دامنه و برد تابع

۱- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ و $g(x) = \tan x : |x| < \frac{\pi}{2}$ باشد، دامنه تابع $f \circ g$ چیست؟

جواب:

$$(f \circ g)(x) = \frac{\sqrt{1-\tan^2 x}}{\tan x} \xrightarrow{\tan x \neq 0} \mathcal{D}_{f \circ g} = \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$$

۲- دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{[\cos \pi x]}$ چیست؟

جواب:

$$[\cos \pi x] \neq 0 \xrightarrow{-1 \leq \cos \pi x \leq 1} \cos \pi x < 0 \text{ یا } \cos \pi x = 1$$

$$\rightarrow \mathcal{D}_f = \left(\dots \cup \left(\frac{-7}{2}, \frac{-5}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) \cup \dots\right) \cup \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$$

فصل ۱۲

شمارش (ترکیب و جایگشت)

۱- در بسط دوجمله‌ای $(x + \frac{1}{\sqrt{x}})^{15}$ ضریب جمله مستقل از x چند است؟ ($x > 0$)

جواب: دقت کنید: $15 = 10 + 5$ و $10 = \binom{15}{5} (x)^5 (\frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$ ، پس:

$$\binom{15}{5} (x)^5 (\frac{1}{\sqrt{x}})^{10} = \binom{15}{5} = \frac{15!}{10!5!} = \frac{15(14)(13)(12)(11)}{5(4)(3)(2)(1)} = 3003$$

۲- ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند تعداد پنج رقمی‌های حاصل چند است؟

جواب: اعداد ۱ و ۳ و ۵ که فرد هستند را در یک دسته کنار هم قرار می‌دهیم و اعداد ۲ و ۴ نیز جداگانه، پس داریم:

$$3! \times 2! = (6)(2) = 12$$

۳- هفت کبوتر یکسان به چند طریق می‌توانند در سه لانه متمایز قرار گیرند به طوری که هیچ لانه‌ای خالی نماند؟

جواب: بدون استفاده از فرمول، هفت کبوتر را کنار هم می‌چینیم و مرز میان آن‌ها مشخص کننده تعداد کبوتر در هر لانه است پس از بین شش مرز ممکن برای انتخاب کافیس‌ت دوتا را انتخاب کنیم پس:

$$\binom{6}{2} = 15$$

تمرین: ضریب جمله‌ی مستقل از x در دو جمله‌ای $(x^2 + \frac{2}{x})^6$ چند است؟

۴- حروف کلمه‌ی LAGRANGE را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟

جواب:

$$6! = 720$$

۵- در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت‌نام کرده‌اند. چند طریق سخنرانی برای آنان وجود دارد بطوریکه بین سخنرانی دو فرد a و b از آنان، فقط یک نفر سخنرانی کند؟

جواب:

$$(3!)(2)(3) = 36$$

۶- به چند طریق میتوان ۱۲ سکه را بین سه نفر تقسیم کرد، بطوریکه لااقل به هرکدام یک سکه برسد؟

جواب:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N} \xrightarrow{\binom{n-1}{k-1}} \binom{11}{2} = 55$$

۷- هر یک از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را در یکی از ۶ خانه‌ی هم‌ردیف به تصادف قرار می‌دهیم، با کدام احتمال این ارقام در خانه‌های متوالی و دو رقم زوج کنار هم قرار می‌گیرند؟

جواب:

$$p = \frac{4!(2!)2}{\binom{6}{5}5!} = \frac{2}{15}$$

تمرین: چند عدد سه رقمی وجود دارد که در آن‌ها هر یک از رقم‌های ۳ و ۶، حداقل یک بار، ظاهر شوند؟

۸- از ۱۰ پرسش موجود، به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را جهت پاسخ‌گویی انتخاب کرد، به شرط آن که حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول، انتخاب شود؟

جواب:

$$\binom{5}{5}\binom{5}{3} + \binom{5}{4}\binom{5}{4} = 10 + 25 = 35$$

۹- تعداد جایگشت‌های سه حرفی انتخاب‌شده از حروف کلمه DELAVAR چند است؟

جواب:

$$\binom{6}{3}3! + \binom{5}{1}\left(\frac{3!}{2!}\right) = 120 + 15 = 135$$

۱۰- چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

جواب: دو حالت داریم یا رقم یکان عدد یک است و یا یکان یک نیست، پس:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 + 3 \times 3 \times 2 \times 4 = 24 + 72 = 96$$

ریاضیات پاری

فصل ۱۳

عبارات و معادلات گویا و گنگ

۱- خلاصه شده‌ی عبارت $(\frac{5x-2}{x-4} + x)(1 - \frac{6}{x+2})$ چیست؟

جواب:

$$\begin{aligned} (1 - \frac{6}{x+2})(\frac{5x-2}{x-4} + x) &= (\frac{x+2-6}{x+2})(\frac{5x-2+x(x-4)}{x-4}) \\ &= (\frac{x-4}{x+2})(\frac{x^2+x-2}{x-4}) = \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} = x-1 \end{aligned}$$

۲- ریشه بزرگتر معادله $\frac{6x}{x-1} + \frac{x-1}{3x} = 3$ چند است؟

جواب:

$$\frac{6x}{x-1} + \frac{x-1}{3x} = \frac{18x^2 + x^2 - 2x + 1}{3x(x-1)} = \frac{19x^2 - 2x + 1}{3x(x-1)} = 3$$

طرفین-وسطین $\rightarrow 19x^2 - 2x + 1 = 9x^2 - 9x \rightarrow 10x^2 + 7x + 1 = 0$

$$\xrightarrow{\Delta \text{ به روش}} x = \frac{-1}{2} \text{ یا } x = \frac{-1}{5} \xrightarrow{\text{بزرگتر}} \frac{-1}{5}$$

فصل ۱۴

هندسه تحلیلی مقدماتی

۱- نمودارهای دو تابع $y = 2x^2 + ax + b$ و $y = 2x + b$ در نقطه‌ای به طول ۲ بر روی محور x ها متقاطع‌اند. $a - b$ چند است؟

جواب:

$$\begin{aligned} \text{محور } x \text{ها} \rightarrow y = 0 &\xrightarrow{x=2} 2(2)+b=0 \rightarrow b=-4 \rightarrow 2(2)^2+2a+(-4)=0 \rightarrow a=2 \\ &\rightarrow a-b=2-(-4)=6. \end{aligned}$$

۲- یک خط از دسته خطوط به معادله $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$ بر خط گذرنده بر دو نقطه $(2, -1)$ و $(8, 3)$ عمود است. معادله آن خط چیست؟

جواب:

$$\text{فرمول شیب خط عمود} \quad m'(m')=-1 \quad \rightarrow \quad m' = \frac{-3}{2} = \frac{3}{-2} = \frac{3}{2} = \frac{3 - (-1)}{8 - 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{شیب خط}$$

$$\frac{2k}{-(k+1)} = \frac{-3}{2} \rightarrow k = 3 \xrightarrow{k=3 \text{ را جایگذاری می‌کنیم.}} 4y + 6x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{+1 \text{ دو طرف}} 4y + 6x - 1 = 0 \xrightarrow{\times \frac{1}{2} \text{ دو طرف}} 2y + 3x = 1$$

$$\text{۳- از دستگاه معادلات} \quad \begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{y+z}{3} = z-3 \\ x+y+z=0 \end{cases} \quad \text{مقدار } y \text{ کدام است؟}$$

جواب:

$$x+y+z=0 \rightarrow x+y = -z \xrightarrow{\frac{x+y}{2}=z-3} \frac{-z}{2} = z-3 \rightarrow z=2$$

$$\frac{\frac{y+z}{3} = z-3}{z=2} \rightarrow \frac{2+y}{3} = -1 \rightarrow y = -5$$

۴- تحت یک بازتاب نسبت به خط، نقطه $(-2, 1)$ روی نقطه $(2, 5)$ تصویر می‌شود. تصویر چه نقطه‌ای تحت این بازتاب نقطه $(3, 4)$ است؟

جواب:

$$m' = \frac{5-1}{2-(-2)} = 1 \xrightarrow{mm'=-1} m = -1$$

بازتاب کردن با عمود کردن بدست می‌آید.

$$\rightarrow \left(\frac{2+(-2)}{2}, \frac{5+1}{2} \right) = (0, 3) \xrightarrow{y-y_0=m(x-x_0)} y-3 = -x+0 \rightarrow y = -x+3$$

فرمول نقطه وسط

$$\xrightarrow[m=1]{(3,4)} y = x+1 \rightarrow x+1 = -x+3 \rightarrow x = 1, y = 2 \rightarrow (1, 2)$$

نقطه روی خط هنگام بازتاب

$$1 = \frac{x_1+3}{2}, 2 = \frac{y_1+4}{2} \rightarrow x_1 = -1, y_1 = 0 \rightarrow (-1, 0)$$

تمرین: معادله‌ی سه ضلع یک مثلث $x = 1, y = 2x, x + y = 1$ است. معادله‌ی خطی که کوچکترین ارتفاع این مثلث روی آن قرار دارد چیست؟
راهنمایی: سه خط را رسم کنید و دقت کنید کوچکترین ارتفاع بر بزرگترین ضلع وارد می‌شود. ((چرا؟))

دو نقطه بر خط به معادله $y = x - 1$ قرار دارند. که فاصله این نقاط از خط به معادله $2x - 3y = 5$ برابر $\sqrt{13}$ است. طول این دو نقطه، چند است؟

جواب: هر نقطه روی خط $y = x - 1$ بصورت $(x_0, x_0 - 1)$ است، پس با استفاده از فرمول فاصله نقطه از خط داریم:

$$\sqrt{13} = \frac{|2x_0 - 3(x_0 - 1) - 5|}{\sqrt{4+9}} \rightarrow |x_0 + 2| = 13 \rightarrow x_0 = 11 \text{ یا } x_0 = 15$$

۵- ضریب زاویه خطی که نقطه $(-۳, ۵)$ را به نقطه تلاقی دو خط به معادلات $x = y + ۸$ و $۵x + ۲y + ۹ = ۰$ وصل کند، چند است؟

جواب:

$$m = \frac{-۷ - ۵}{۱ - (-۳)} = -۳ \rightarrow \text{نقطه تلاقی } (۱, -۷)$$

تمرین: نقطه $A(۷, ۶)$ رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y - ۳x = ۱۱$ و $۳y + ۴x = ۸$ می باشد، مختصات وسط قطر آن چیست؟



فصل ۱۵

ترکیب توابع و وارون تابع

۱- اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (5, 3), (4, -1)\}$ و $g = \{(2, 3), (-1, 4), (4, 1), (3, 0)\}$ تابع $g \circ f^{-1}$ چیست؟

جواب:

$$\rightarrow f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (3, 5), (-1, 4)\} \rightarrow g \circ f^{-1} = \{(5, 3), (-1, 1)\}$$

۲- اگر $f(x) = x^2 - 1$ نمودار تابع $y = (f \circ f)(x)$ با محور x ها چند نقطه تلاقی دارد؟

جواب:

$$y = (x^2 - 1)^2 - 1 \xrightarrow{x \in \mathbb{R}} x = \sqrt{2} \text{ یا } x = -\sqrt{2} \text{ یا } x = 0$$

۳- اگر $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$ باشد، مقدار $(g \circ f)(\frac{\pi}{4})$ چند است؟

جواب:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\frac{\pi}{4}) &= g(f(\frac{\pi}{4})) = g(\sin \frac{\pi}{4}) = g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

۴- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $f = \{(x, 2x - 1), x \in A\}$ تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟

جواب: باید $2x - 1 \in A$ ، $x \in A$ پس

$$x \in \{1, 2, 3\} = \mathcal{D}_{f \circ f}$$

۵- اگر $f(x) = |x| - x$ ضابطه تابع $(f \circ f)(x)$ چیست؟

جواب:

$$(f \circ f)(x) = ||x| - x| - (|x| - x) \xrightarrow{|x| - x > 0} |x| - x - |x| + x = 0$$

۶- اگر $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ دقیقاً ضابطه $f^{-1}(x)$ چیست؟

جواب:

$$y = x + \sqrt{x^2 + 1} \rightarrow y^2 = x^2 + x^2 + 1 + 2x\sqrt{x^2 + 1} = 2x^2 + 2x\sqrt{x^2 + 1} + 1$$

$$\rightarrow y^2 = 2x(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 1 \rightarrow y^2 = 2xy + 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}(y - \frac{1}{y})$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$$

۷- اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $f \circ g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ مقدار $g(1)$ چند است؟

جواب:

$$f(g(1)) = \frac{1^2 + 2}{1^2 + 1} = \frac{3}{2} \xrightarrow{f(x) = \frac{x+1}{x-1}} f(g(1)) = \frac{g(1) + 1}{g(1) - 1} = \frac{3}{2} \rightarrow g(1) = 5$$

۸- اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = \frac{x}{1-x}$ ، آن گاه $(f \circ g)(\sqrt{2})$ چند است؟

جواب:

$$f(g(\sqrt{2})) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right) \xrightarrow[\sqrt{2} \approx 1.4]{\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}-2} f(g(\sqrt{2})) = f(-\sqrt{2}-2)$$

$$= [-\sqrt{2}-2] = [-3, 4] = -4$$

۹- در تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ مقدار $f^{-1}(4)$ چند است؟

جواب:

$$f(-2) = -(-2) + \sqrt{-2(-2)} = 2 + 2 = 4 \rightarrow f^{-1}(4) = -2$$

تمرین: اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ باشد، حاصل $(f \circ g)(1 - \sqrt{2})$ و $(g \circ f)(1 - \sqrt{2})$ چند است؟

۱- دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ مفروض‌اند. اگر $g(f(x)) = -2$ باشد، مجموعه مقادیر x چیست؟

جواب:

$$x \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = 0} g(f(x)) = g(0) = -2$$

$$x \in \mathbb{R} \xrightarrow{x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = -1} g(f(x)) = g(-1) = -2$$

$$x \in \mathbb{R}$$

۱۱- اگر $g(x) = f(3x - 4)$ و $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ ، حاصل $g^{-1}(16)$ چند است؟

جواب:

$$g^{-1}(16) = x_0 \rightarrow g(x_0) = f(3x_0 - 4) = 16 \rightarrow f^{-1}(16) = 16 + \sqrt{16} = 20$$

$$\rightarrow f(20) = 16 \rightarrow 3x_0 - 4 = 20 \rightarrow x_0 = 8$$

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & ; x > 3 \\ 2x + 3 & ; x \leq 3 \end{cases} \quad \text{۱۲- در تابع با ضابطه}$$

چند است؟

جواب:

$$f(f(5)) + f(f(1)) = f(2) + f(5) = 7 + 2 = 9$$

۱۳- اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ ، آنگاه ضابطه $f(1-x)$ چیست؟

جواب:

$$x-3 = t \rightarrow x = t+3 \xrightarrow{f(x-3)=x^2-4x+5} f(t) = (t+3)^2 - 4(t+3) + 5 \rightarrow f(t) = t^2 + 2t + 2$$

$$f(1-x) = (1-x)^2 + 2(1-x) + 2 = x^2 - 4x + 5$$

ریاضیات پاری

فصل ۱۶

تعریف لگاریتم و تابع نمایی

۱- اگر $2^x - 2^y = 1$ و $2^x - 2^y = \frac{5}{3}$

$$x - y = ?$$

جواب:

اتحاد مزدوج $\rightarrow 2^y - 2^x = 2^{2x} - 2^{2y} = (2^x - 2^y)(2^x + 2^y) =$

$$2^{2x} = (2^x)^2, \quad 2^{2y} = (2^y)^2$$

$$\xrightarrow{2^x - 2^y = 1} \begin{cases} 2^x + 2^y = \frac{5}{3} \\ 2^x - 2^y = 1 \end{cases}$$

$$2^y = \frac{1}{3}, \quad 2^x = \frac{4}{3}$$

$$\rightarrow y = \log_2 \frac{1}{3}, \quad x = \log_2 \frac{4}{3} \rightarrow x - y = \log_2 \frac{4}{1} = \log_2 4 = 2$$

۲- فاصله نقطه برخورد تابع نمایی $y = 2^x$ با محور y ها و نقطه برخورد معکوس این تابع نمایی با محور x ها چند است؟

جواب:

محور y ها همان خط $x = 0$ است.

$$\xrightarrow{y=2^x} 1 = 2^0 \rightarrow (0, 1)$$

محور x ها همان خط $y = 0$ است.

$$\xrightarrow{x=\log_2 y} x = 1 \rightarrow (1, 0)$$

فرمول فاصله دو نقطه $\rightarrow d = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$

۳- حاصل $\log_5(\sqrt{125})^3$ چند است؟

جواب:

$$\log_5(125^{\frac{1}{3}})^3 = \log_5(5^{\frac{3}{3}})^3 = \log_5 5^{\frac{9}{3}}$$

طبق تعریف لگاریتم $\rightarrow \log_5 5^{\frac{9}{3}} = ۳$

۴- اگر $4\sqrt{2} = 4^x$ و $1 + \log \sqrt{x+1} = \log y$ مقدار y چند است؟

جواب:

$$4\sqrt{2} = 4^x \rightarrow 4(4^{\frac{1}{2}}) = 4^x \rightarrow x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$1 + \log \sqrt{\frac{5}{4} + 1} = 1 + \log \sqrt{\frac{9}{4}} = 1 + \log \frac{3}{2} = \log 10 + \log \frac{3}{2} = \log 15$$

ریاضیات پاری
y = ۱۵

تمرین: اگر لگاریتم a در پایه $\sqrt{3}$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد، آنگاه لگاریتم $(a^2 + 7)$ در پایه ۸ چند است؟

فصل ۱۷

فرمول‌های لگاریتم

۱- اگر $\log_b a = \frac{p}{r}$ باشد آنگاه $\log_{\sqrt{b}} ab^p$ چند است؟

جواب:

$$\begin{aligned}\log_b a = \frac{p}{r} &\rightarrow b^{\frac{p}{r}} = a \rightarrow \log_{\sqrt{b}} ab^p = \log_{\sqrt{b}} b^{\frac{p}{r}} b^p \\ &\rightarrow \log_{\sqrt{b}} b^{\frac{p}{r}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_b b^{\frac{p}{r}} = 2 \cdot \frac{p}{r} = \frac{2p}{r}\end{aligned}$$

۲- اگر $\log_p \sqrt[p]{e^p} = A$ ، حاصل $\log_{\sqrt{e}} p^2$ کدام است؟

جواب:

$$\begin{aligned}\log_p \sqrt[p]{e^p} = A &\rightarrow \frac{p}{p} \log_p e = A \rightarrow \log_p e = \frac{A}{p} \xrightarrow{\log_p e = \frac{1}{\log_e p}} \log_e p = \frac{p}{A} \\ \log_{\sqrt{e}} p^2 &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_e p^2 = \frac{2}{1} \log_e p = \frac{2p}{A}\end{aligned}$$

۳- اگر $\log \frac{p}{x} + \log(x+1) = 1$ باشد، لگاریتم x در پایه ۸ چند است؟

جواب:

$$\log \frac{p}{x} + \log(x+1) = \log \frac{p(x+1)}{x} = 1 \xrightarrow{\log 10 = 1} \frac{p(x+1)}{x} = 10$$

$$px + p = 10x \rightarrow 8x = p \rightarrow x = \frac{p}{8} \rightarrow \log_8 x = \frac{-p}{3}$$

تمرین: از معادلات $\log x = \log 2 + \log y$ و $2^x \times 8^y = 4$ مقدار x کدام است؟

۴- از معادله $\log(2x-1) + \log(x+3) = \log 30 - \log 2$ مقدار $\log_8 x$ چند است؟

جواب:

$$\log(2x-1) + \log(x+3) = \log 30 - \log 2 \xrightarrow[\log a - \log b = \log \frac{a}{b}]{\log a + \log b = \log(ab)} \log(2x-1)(x+3) = \log 15$$

$$\rightarrow (2x-1)(x+3) = 15 \rightarrow 2(x-2)(x+\frac{9}{2}) = 0 \rightarrow x = 2 \quad x = \frac{-9}{2} \xrightarrow{\log_8 x \in \mathbb{R}} x = 2$$

$$\log_8 x = \log_8 2 = \frac{1}{3}$$

۵- اگر $\log 2 = k$ باشد، حاصل $\log(6-2\sqrt{5}) + 2\log(1+\sqrt{5})$ چند است؟

جواب:

$$\log(6-2\sqrt{5}) + 2\log(1+\sqrt{5}) = \log(6-2\sqrt{5}) + \log(1+\sqrt{5})^2 = \log(6-2\sqrt{5}) + \log(6+2\sqrt{5})$$

$$= \log(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5}) = \log(36-20) = \log 16 = \log 2^4 = 4\log 2 = 4k$$

فصل ۱۸

حل معادلات لگاریتمی و توانی

۱- اگر $\log_p(\log_\lambda x) = \log_\lambda(\log_p x)$

$$(\log_p x)^p = ?$$

جواب:

$$\begin{aligned} \log_p(\log_\lambda x) &= \log_\lambda(\log_p x) \xrightarrow{p^p = \lambda} \log_p(\log_{p^p} x) = \log_{p^p}(\log_p x) \\ \rightarrow \log_p\left(\frac{1}{p^p} \log_p x\right) &= \frac{1}{p^p} \log_p(\log_p x) \rightarrow p^p \log_p\left(\frac{1}{p^p} \log_p x\right) = \log_p(\log_p x) \\ \rightarrow \log_p\left(\left(\frac{1}{p^p} \log_p x\right)^{p^p}\right) &= \log_p(\log_p x) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[t := \log_p x]{\text{لگاریتم یک به یک است.}} \left(\frac{1}{p^p} t\right)^{p^p} = t \xrightarrow[t \neq 0]{t \neq 0} t^p = p^p \rightarrow (\log_p x)^p = p^p$$

۲- اگر $\log(\log 5 - \log 2) = \log 5 - \log 2$ باشد مقدار x کدام است؟

جواب:

$$\log(\log 5 - \log 2) = (\log 5)^p - (\log 2)^p \xrightarrow[a^p - b^p = (a-b)(a+b)]{\text{اتحاد مزدوج}} \log(\log 5 - \log 2) = (\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2)$$

$$\xrightarrow[\log a + \log b = \log ab]{\log a - \log b = \log \frac{a}{b}} \log(\log 5 - \log 2) = \left(\log \frac{5}{2}\right)(\log((5)(2)))$$

$$\xrightarrow[\log 1 = 0]{\log 1 = 0} \log(\log 5 - \log 2) = \log \frac{5}{2} \xrightarrow[\text{لگاریتم یک به یک است.}]{\log 1 = 0} \log 5 - \log 2 = \log \frac{5}{2} \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

۳- اگر $\log(x+1) = \log(x-2) + \log 2$ آنگاه $\log_2(x+2)$ چند است؟

جواب:

$$2 \log(x-2) = \log(x-2)^2 = \log(x+1) \rightarrow (x-2)^2 = x+1 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\rightarrow (x-6)(x+1) = 0 \xrightarrow{x-2 > 0} x = 6 \rightarrow \log_2(x+2) = \log_2 8 = \frac{3}{1}$$

۴- اگر $\log 3 + \log \sqrt[5]{3} = \log(81)^k$ ، آنگاه لگاریتم $\frac{5}{k}$ در پایه ۲ چند است؟

جواب:

$$\log 3 + \log \sqrt[5]{3} = \log 3(\sqrt[5]{3}) = \log 3^{\frac{6}{5}} = \log(3^{\frac{6}{5}})^k \rightarrow \frac{6}{5}k = \frac{5}{16} \rightarrow k = \frac{5}{16}$$

$$\rightarrow \log_2 \frac{5}{k} = \log_2 16 = 4$$

تمرین: از تساوی $\log_5(2x-1) + \log_5(3x-5) = 1$ ، مقدار $\log_5(6x+3)$ چند است؟

ریاضیات پاری

۵- اگر $\log(x-2) = 2 \log 2 - \log(x-4)$ ، حاصل $\log_5(x-3)$ چند است؟

جواب:

$$\log(x-2) = \log 4 - \log(x-4) \rightarrow x-2 = \frac{4}{x-4} \rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\log(x-4) \in \mathbb{R} \rightarrow x-4 > 0} x = 3 + \sqrt{5} \rightarrow \log_5(x-3) = \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$$

۶- اگر $4^a = 2\sqrt{2}$ ، لگاریتم $(4a + 1)$ در پایه ۴ چند است؟

جواب:

$$4^a = 2\sqrt{2} \rightarrow a = \frac{3}{4} \rightarrow \log_4(4(\frac{3}{4}) + 1) = 1$$

تمرین: از معادله $\log_3(x^2 - 1) = 1 + \log_3(x + 3)$ مقدار لگاریتم $(x - 3)$ در مبنای ۴ چند است؟

۷- از دو معادله

$$\log_3 x + \log_3 y = 2$$

و

$$x^2 + y^2 = 46$$

، لگاریتم $(x + y)$ در پایه ۴ چند است؟

جواب:

$$\log_3 x + \log_3 y = \log_3 xy = 2 \xrightarrow[2=\log_3 9]{(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy} (x + y)^2 = 64$$

$$\xrightarrow{x, y > 0} x + y = 8 \rightarrow \log_4(x + y) = \frac{3}{2}$$

۸- از تساوی $9^{x+4} = (36)^3 \times (\frac{1}{3})^{-2}$ ، عدد x چند است؟

جواب:

$$3^{2x+8} = 3^6 \times 2^6 \times 2^{-6} \times 3^2 \rightarrow 2x + 8 = 8 \rightarrow x = 0$$

۹- اگر $\log_3(2x - 1) = -2$ باشد، آنگاه لگاریتم $(9x + 3)$ در پایه ۲ چند است؟

جواب:

$$3^{-2} = 2x - 1 \rightarrow 2x - 1 = \frac{1}{9} \rightarrow x = \frac{5}{9} \rightarrow 9x + 3 = 8 = 2^3 \rightarrow \log_2(9x + 3) = 3$$

فصل ۱۹

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

۱- ساده شده عبارت $۲ \cos(\frac{\pi}{۴} + \alpha) \sin(\frac{\pi}{۴} - \alpha)$ چیست؟

جواب:

$$\begin{aligned} \rightarrow ۲ \cos(\frac{\pi}{۴} + \alpha) \sin(\frac{\pi}{۴} - \alpha) &= \sin((\frac{\pi}{۴} - \alpha) + (\frac{\pi}{۴} + \alpha)) + \sin(\frac{\pi}{۴} - \alpha - (\frac{\pi}{۴} + \alpha)) = \sin \frac{\pi}{۲} - \sin(۲\alpha) \\ &= ۱ - \sin(۲\alpha) \end{aligned}$$

۲- حاصل $\cos ۱۶۵^\circ \cos ۱۰۵^\circ$ چند است؟

جواب:

$$\cos ۱۶۵^\circ \cos ۱۰۵^\circ = (-\cos ۱۵^\circ)(-\cos ۷۵^\circ) = (-\cos ۱۵^\circ)(-\sin ۱۵^\circ) = \frac{1}{۲} \sin ۳۰^\circ =$$

۳- اگر $a + b = \frac{\pi}{۴}$ باشد، حاصل $\cos a \cos b \cos(\frac{\pi}{۴} - a) \cos(\frac{\pi}{۴} - b)$ کدام است؟

جواب:

$$\begin{aligned} \cos a \cos b \cos(\frac{\pi}{۴} - a) \cos(\frac{\pi}{۴} - b) &= \cos a \cos b \sin a \sin b = ۲(۲ \sin a \cos a)(۲ \sin b \cos b) \\ &= ۲ \sin ۲a \sin ۲b \xrightarrow{a+b=\frac{\pi}{۴} \rightarrow ۲b=\frac{\pi}{۴}-۲a} = ۲ \sin ۲a \cos ۲a = \sin ۴a \end{aligned}$$

۴- ساده شده عبارت $\sin 3x - 2 \sin 4x + \sin 5x$ چیست؟

جواب:

$$\sin 3x - 2 \sin 4x + \sin 5x = \sin 3x + \sin 5x - 2 \sin 4x = \sin(4x - x) + \sin(4x + x) - 2 \sin 4x$$

$$\xrightarrow{\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y} 2 \sin 4x \cos x - 2 \sin 4x = 2 \sin 4x (\cos x - 1)$$

$$\xrightarrow{\cos x - 1 = -2 \sin^2 \frac{x}{2}} = -4 \sin 4x \sin^2 \frac{x}{2}$$

۵- ساده شده عبارت $(\tan 70^\circ + \tan 10^\circ) \cos 50^\circ$ برابر کدام است؟

جواب:

$$\begin{aligned} & \cos 50^\circ \left(\frac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ} + \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} \right) \\ &= \cos 50^\circ \left(\frac{\sin 70^\circ \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cos 70^\circ}{\cos 10^\circ \cos 70^\circ} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\sin 40^\circ \sin 80^\circ}{\sin 80^\circ \sin 20^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = 2 \cos 20^\circ$$

۶- حاصل عبارت $\cos 20^\circ \cos 40^\circ + \cos^2 80^\circ$ چیست؟

جواب:

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ + \cos^2 80^\circ = \frac{1}{2} (\cos 60^\circ + \cos 20^\circ) + \frac{1}{2} (1 + \cos 160^\circ)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\cos 20^\circ}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\cos 20^\circ}{2} = \frac{3}{4}$$

۷- حاصل عبارت $\frac{1}{\cos 20^\circ} + 2$ چیست؟

جواب:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos 20^\circ} + \frac{1}{\cos 60^\circ} &= \frac{\cos 60^\circ + \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ \cos 60^\circ} \\ &= \frac{2 \cos\left(\frac{60^\circ+20^\circ}{2}\right) \cos\left(\frac{60^\circ-20^\circ}{2}\right)}{\cos 20^\circ \cos 60^\circ} = 4 \cos 40^\circ \end{aligned}$$

۸- اگر $1 = \tan \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ باشد، مقدار $\cos 2x$ چند است؟

جواب:

$$\tan \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -\sqrt{3}(-\cos x) = 1 \rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = \frac{-1}{3}$$

تمرین: اگر $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ باشد، $\frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha}$ چند است؟

راهنمایی: $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ هم علامت هستند و

$$|\sin \alpha| = \frac{1}{\sqrt{5}}, |\cos \alpha| = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

۹- ساده شده عبارت $(\cos 10^\circ - \cos 70^\circ)(\tan 70^\circ - \cot 10^\circ)$ چیست؟

جواب:

$$(2 \sin 40^\circ \sin 30^\circ)(\tan 70^\circ + \tan 10^\circ) = \sin 40^\circ \left(\frac{\sin 80^\circ}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} \right)$$

$$= \frac{\sin 40^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 2 \cos 20^\circ$$

فصل ۲۰

مفهوم حد

۱- اگر $f(x) = \frac{2x+5}{x^2-4x+3}$ و $g(x) = 2^x$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(f(x))$ چند است؟
جواب: داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+5}{(x-1)(x-3)} = -\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} g(f(x)) \rightarrow 2^{-\infty} \rightarrow 0$$

۲- در بازه‌ی $[\frac{1}{p}, \frac{p}{p}]$ همواره $\frac{\sin \pi x}{1-x} \leq f(x) \leq g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{\sin \pi x}{1-x} - g(x)) = 0$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ برابر چند است؟

جواب:

$$\xrightarrow{x \in [\frac{1}{p}, \frac{p}{p}] \rightarrow \frac{\sin \pi x}{1-x} \leq f(x) \leq g(x)} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x}$$

$$\xrightarrow{Hop} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{-1} = \pi$$

تمرین: اگر $f(x) = \begin{cases} ax-1 & ; x < 1 \\ x^2+2a & ; x \geq 1 \end{cases}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ ، مقدار

a چند است؟

۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^p \sin^p x}{x^p \sin \frac{1}{p} x} \right|$ چند است؟

جواب:

$$\left| \sin \frac{1}{p} x \right| \leq 1 \rightarrow \left| \frac{x^p \sin^p x}{x^p \sin \frac{1}{p} x} \right| \geq \left| \frac{x^p \sin^p x}{x^p} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^p \sin^p x}{x^p \sin \frac{1}{p} x} \right| \geq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^p \sin^p x}{x^p} \right| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^p \sin^p x}{x^p \sin \frac{1}{p} x} \right| = +\infty$$

۴- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (x+a)[x]$ اگر $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = 3$ باشد، مقدار حقیقی a چند است؟

جواب:

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = p(p+a) - (p+a) = p+a = 3 \rightarrow a = 1$$

۵- در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & ; 0 < x < 1 \\ -\sqrt{1+x} & ; -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^p - x)$ چند است؟

جواب:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^p - x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x(x^p - 1)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{1-t} = 1$$

۶- در همسایگی محذوف متقارن به صورت $\{3\} - (3a-7, a+5)$ ، شعاع همسایگی، چند است؟

جواب:

$$\frac{3a-7+(a+5)}{2} = 3 \rightarrow a = 2 \rightarrow (3a-7, a+5) = (-1, 7) \rightarrow \{3\} - (-1, 7) = \{3\} \rightarrow \text{شعاع همسایگی} = 4$$

فصل ۲۱

محاسبه حد و قضایای آن

۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}}$ چند است؟
جواب:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{Hop} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{-2}{2\sqrt{2x+1}}}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}} = \frac{\frac{-2}{2\sqrt{2(4)+1}}}{\frac{-1}{2\sqrt{4}}} \\ &= \frac{\frac{-1}{3}}{\frac{-1}{4}} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) \left[\frac{1}{x+1} \right]$ چند است؟ (نماد [] جزء صحیح است).
جواب:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) \left[\frac{1}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1)(0) = 0$$

۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} (2 - \sqrt{x}) \tan\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right)$ چند است؟
جواب:

$$\lim_{x \rightarrow 4} (2 - \sqrt{x}) \tan\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2 - \sqrt{x}) \sin\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right)}$$

$$\xrightarrow{Hop} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}} \sin\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right) + (2 - \sqrt{x}) \cos\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right) \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)}{-\sin\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right) \frac{\pi}{\lambda}} = \frac{2}{\pi}$$

۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x}$ چند است؟

جواب:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 + \frac{\cos x}{\sin x}}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x + \cos x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{\sin x} = -1 \end{aligned}$$

۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\sin x + \sin 3x}$ برابر کدام است؟

جواب:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\sin x + \sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(\sin(3x - x) + \sin(3x + x))} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{2(2 \sin 2x \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{2(2 \sin 2x \cos x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2(2 \sin x \cos x)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\tan \pi x}{|x^2 - 1|}$ چند است؟

جواب:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\tan \pi x}{|x^2 - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\tan \pi x}{x^2 - 1}$$

$$\xrightarrow{Hop} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\pi \left(\frac{1}{\cos^2 \pi x} \right)}{2x} = \frac{\pi}{2}$$

تمرین: حاصل $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{2x}{x^2 - 1} - \left| \frac{x}{x + 1} \right| \right)$ چند است؟

۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}^+} \frac{|\cos \pi x|}{1 - \sqrt{2}x}$ چند است؟

جواب:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}^+} \frac{|\cos \pi x|}{1 - \sqrt{2}x} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}^+} \frac{-\cos \pi x}{1 - \sqrt{2}x}$$

$$\xrightarrow{Hop} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}^+} \frac{\pi \sin \pi x}{-\frac{1}{\sqrt{2}x}} = -\pi$$

۸- حد عبارت $\frac{x+2}{x^2+x} - \frac{3x-4}{x^2-2x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ چند است؟

جواب:

$$\frac{x+2}{x^2+x} - \frac{3x-4}{x^2-2x} = \frac{x+2}{x(x+1)} - \frac{3x-4}{x(x-2)} = \frac{(x+2)(x-2) - (3x-4)(x+1)}{x(x+1)(x-2)}$$

$$\frac{-2x^2+x}{x(x+1)(x-2)} = \frac{x(-2x+1)}{x(x+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-2x+1)}{x(x+1)(x-2)} = \frac{-1}{2}$$

تمرین: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{4x-8} - \frac{1}{x^2-4}$ چند است؟

۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{2 - \sqrt{4-x^2}}$ چند است؟

جواب:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{2 - \sqrt{4-x^2}} \xrightarrow{Hop} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 3 \sin 3x}{\frac{-2x}{-2\sqrt{4-x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\frac{2x}{2}} = 4$$

تمرین: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \pi x}{x^p - \sqrt{x}}$ چند است؟

۱۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^p x - 1}{\cos px}$ ، چند است؟

جواب:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^p x - 1}{\cos px} \xrightarrow{Hop} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{p \tan x (1 + \tan^p x)}{-p \sin px}$$

$$= \frac{-p}{p} = -1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^p x - 1}{\cos px} = -1$$

۱۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos px}}{1 - \cos x}$ چند است؟

جواب: می دانیم:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

پس

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos px}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} - \sqrt{1 - \frac{p^2 x^2}{2}}}{\frac{x^2}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{4} - (1 - \frac{p^2 x^2}{4})}{\frac{x^2}{2}} = \frac{\frac{p^2}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{p^2}{2}$$

۱۲- حد عبارت $\frac{\cos x}{1 - \sin x}$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$ چند است؟

جواب:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x} \xrightarrow{Hop} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{-\sin x}{-\cos x} = -\infty$$

۱۳- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{ax^n + 4}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ چند است؟

جواب:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \xrightarrow{\frac{-1}{a} = \frac{1}{2}} a = -2, n = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{ax^n + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{-2x + 4} \xrightarrow{Hop} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}}{-2} = \frac{1}{3}$$

۱۴- اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، حد زیر برابر چیست؟

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\alpha}} \sqrt{\frac{1 - \cos(cx^2 + bx + a)}{2(1 - \alpha x)^2}}$$

جواب:

$$cx^2 + bx + a = c(x - \frac{1}{\alpha})(x - \frac{1}{\beta})$$

پس

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\alpha}} \sqrt{\frac{1 - \cos(cx^2 + bx + a)}{2(1 - \alpha x)^2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\alpha}} \sqrt{\frac{1 - \cos(c(x - \frac{1}{\alpha})(x - \frac{1}{\beta}))}{2(1 - \alpha x)^2}}$$

و چون

$$-\cos(c(x - \frac{1}{\alpha})(x - \frac{1}{\beta})) \approx 1 - \frac{(c(x - \frac{1}{\alpha})(x - \frac{1}{\beta}))^2}{2} \quad (x \approx \frac{1}{\alpha})$$

در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\alpha}} \sqrt{\frac{1 - \cos(cx^2 + bx + a)}{2(1 - \alpha x)^2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\alpha}} \sqrt{\frac{\frac{c^2}{2}(x - \frac{1}{\beta})^2}{2\alpha^2}} = |\frac{c}{2\alpha}(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta})|$$

تمرین: حاصل حد زیر چیست؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^p(\sin x) - \cos(\sin^p x) + \cos^p(\sin x) \cos(\sin^p x)}{x^6}$$

۱۵- اگر بدانیم: $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e \neq 1$ ، حاصل حد زیر بر حسب e چیست؟ ($e \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{\frac{1}{\cot x - \tan x}}$$

جواب:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{\frac{1}{\cot x - \tan x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{\frac{\tan x}{1 - \tan^2 x}}$$

$$\xrightarrow{\tan x = 1+h} \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1+h}{1-(1+h)^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{-2h-h^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} ((1+h)^{\frac{1}{h}})^{\frac{1}{-2-h}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} e^{\frac{1}{-2-h}} = e^{\frac{-1}{2}}$$

ریاضیات پارس

تمرین: حاصل حد زیر چیست؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin^2 x - 2 \sin x}$$

فصل ۲۲

پیوستگی

۱- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin x + 2 \cos x & ; 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -\cos 2x & ; \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ با تعریف $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ از نظر پیوستگی در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ چگونه است؟

جواب:

از چپ پیوسته است. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin x + 2 \cos x = 1 = f(\frac{\pi}{2}) \rightarrow$

از راست پیوسته است. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} -\cos 2x = 1 = f(\frac{\pi}{2}) \rightarrow$

پس در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته است.

۲- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & ; x < 2 \\ a + 2 \sin \frac{\pi}{x} & ; x \geq 2 \end{cases}$ در بازه $[0, 3]$ پیوسته است؟

جواب:

$$\xrightarrow{\text{شرط لازم پیوستگی}} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1)[x] = a + 2(1) \\ \rightarrow 1 = a + 2 \rightarrow a = -1$$

۳- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}} & ; x > 1 \\ ax - a + 4 & ; x \leq 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

جواب:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}} = f(1)$$

$$\xrightarrow{Hop} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4 = a - a + 4 = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

پس به ازای همه مقادیر a در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۴- در نقطه‌ای یک تابع پیوسته و تابع دیگر ناپیوسته است با کدام عمل از عمل‌های ضرب، جمع و یا تفاضل بین توابع ممکن است تابع حاصل در آن نقطه پیوسته باشد؟

جواب: ضرب چون تابع ثابت صفر پیوسته است و ضربدر هر تابع نیز تابع ثابت صفر می‌شود. دقت کنید:

$$(f - g) + g = f, f - (f - g) = g$$

تمرین: تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x < 0 \\ x + 1 & ; 0 \leq x < 1 \\ 2x + 2 & ; 1 \leq x < 2 \\ x^2 + 2 & ; x \geq 2 \end{cases}$ در چند نقطه ناپیوسته است و در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۵- مجموعه طول نقاط ناپیوستگی نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5x^2 - 4x} & ; |x| > 1 \\ 2x - 1 & ; |x| \leq 1 \end{cases}$

چیست؟

جواب: کافیت فقط در نقاط ۱ و -۱ بررسی کنیم (چرا؟) پس

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 1$$

$$-3 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3$$

پس مجموعه طول نقاط ناپیوستگی برابر $\{-1\}$ است.

$$6- \text{تابع } f \text{ با ضابطه } f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

در نقطه $x = 0$ از نظر پیوستگی

چگونه است؟

جواب:

$$-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x| \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

پس در $x = 0$ پیوسته است.

$$7- \text{تابع با ضابطه } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x + |x|} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

در $x = 0$ چگونه

است؟

جواب:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{2x + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{2x + x} = \frac{1}{3} \neq f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{2x + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{2x - x} = 1 = f(0)$$

پس از چپ پیوسته و از راست ناپیوسته است.

$$8- \text{تابع } f \text{ با ضابطه } f(x) = (x - 3)\left[\frac{1}{3}x - 1\right] \text{ روی بازه } (0, 9) \text{ در چند نقطه ناپیوسته}$$

است؟

جواب:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-3) & ; 0 < x < 3 \\ x-3 & ; 3 \leq x < 6 \\ 2x-6 & ; 6 \leq x < 9 \end{cases}$$

پس f در نقطه $x = 6$ ناپیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^p x}{1 - \cos x} & ; x > 0 \\ a \sin(x + \frac{\pi}{6}) & ; x \leq 0 \end{cases}$$

۹- تابع با ضابطه‌ی

$x = 0$ پیوسته است؟

جواب:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^p x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^p x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \cos x = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \rightarrow 2 = \lim_{x \rightarrow 0^-} a \sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{a}{2} \rightarrow a = 4$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} & ; x \neq 2 \\ a & ; x = 2 \end{cases}$$

۱۰- تابع با ضابطه‌ی

نقطه $x = 2$ پیوسته است؟

جواب:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} \xrightarrow{Hop} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2x}}}{-1} = \frac{-1}{2} = f(2) = a$$

تمرین: تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & ; |x| > 1 \\ 2x & ; |x| \leq 1 \end{cases}$$

از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های ۱ و -۱ چگونه است؟

۱۱- تابع با ضابطه $f(x) = [x^2 - 3]$ روی بازه $[2, 2 + k]$ پیوسته است، بیشترین مقدار k چند است؟

جواب:

$$x \in [2, 2 + k)$$

نباید $x^2 - 3$ در این بازه یک واحد کامل صعود کند زیرا در این صورت جزء صحیح آن یک واحد پرش می‌کند.

$$1 \leq x^2 - 3 < 2$$

$$2 \leq x < \sqrt{5} \rightarrow k = \sqrt{5} - 2$$

۱۲- تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} a + \sin 3x & ; 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ b \cos 2x & ; \frac{\pi}{2} < x < 2\pi \end{cases}$$

در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ پیوسته است. $a - b$ چند است؟

جواب:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = f(2) = 2 \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} a + \sin 3x = a - 1 = 2 \rightarrow a = 3 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} b \cos 2x = b(-1) = 2 \rightarrow b = -2 \end{cases}$$

$$\rightarrow a - b = 3 - (-2) = 5$$

۱۳- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^p + x - ۲|}{x - ۱} & ; x \neq ۱ \\ a & ; x = ۱ \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a بر $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

جواب:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^p + x - ۲|}{x - ۱} = +\infty \neq -\infty = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^p + x - ۲|}{x - ۱}$$

پس به ازای هیچ مقدار a بر $\mathbb{R}$ پیوسته نیست.



فصل ۲۳

تابع درجه ۳

۱- به ازای کدام مقادیر a ، منحنی به معادله $y = (\frac{1}{p}x + a)(x^2 - 4)$ بر محور x ها در یک نقطه مماس است؟

جواب: با توجه به نمودار یک تابع درجه ۳، پس ریشه‌های $\frac{1}{p}x + a = 0$ باید همان ریشه‌های معادله $x^2 - 4 = 0$ باشد، پس

$$a \in \{-1, 1\}$$

تمرین: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$; $x > -1$ ، در بازه (a, b) زیر محور x هاست. بیشترین مقدار $b - a$ چند است؟

ریاضیات پاری

فصل ۲۴

الگوریتم تقسیم عبارات جبری

۱- عبارت $x^4 + 4ax^2 + 2bx + 1$ بر $x^2 - 4$ بخش پذیر است. $a + b$ چند است؟

جواب:

$$p(x) = x^4 + 4ax^2 + 2bx + 1 = (x^2 - 4)q(x) = (x - 2)(x + 2)q(x) \rightarrow p(2) = p(-2) = 0$$

$$\rightarrow a = \frac{-17}{16}, b = 0 \rightarrow a + b = \frac{-17}{16}$$

۲- اگر عبارت $x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 + k$ به ازای هر عدد طبیعی n بر دو جمله ای $x + 2$ بخش پذیر باشد، آن گاه تقسیم آن بر عبارت $x^2 - 1$ چیست؟

جواب:

$$(-2)^{2n+1} + 2(-2)^{2n} + (-2)^5 - 5(-2)^3 + k = 0 \rightarrow k = -8$$

$$x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 - 8 = (x^2 - 1)q(x) + r(x) \xrightarrow[x=1]{r(x)=ax+b} a+b = 1+2+1-5-8 = -9$$

$$\xrightarrow[x=-1]{r(x)=ax+b} -a+b = -1+2-1+5-8 = -3 \rightarrow r(x) = -3x - 6$$

۳- در تقسیم عبارت $(x^2 - 2)(6x + 1)$ بر دو جمله ای $3x + 2$ خارج قسمت به صورت توان های نزولی x نوشته شده است. ضریب جمله از درجه ۱ چند است؟

جواب:

$$(x^2 - 2)(6x + 1) = 6x^3 + x^2 - 12x - 2 = (3x + 2)(2x^2 - x - \frac{10}{3}) + \frac{14}{3} \rightarrow -1 \text{ ضریب } x$$

۴- عبارت $a(a-3)(a-4) - 12a + 36$ را تجزیه کنید.

جواب:

$$a(a-3)(a-4) - 12a + 36 = a(a-3)(a-4) - 12(a-3) = (a-3)(a(a-4) - 12)$$

$$= (a-3)(a^2 - 4a - 12) = (a-3)(a+2)(a-6)$$



فصل ۲۵

تناوب و تانژانت

۱- دوره تناوب اصلی تابع با ضابطه $f(x) = \tan ۳x - \cot ۳x$ چند است؟

جواب:

$$f\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \tan ۳\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cot ۳\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\cot ۳x + \tan ۳x = f(x)$$

$$T = \frac{\pi}{6}$$

ریاضیات پاری

فصل ۲۶

معادلات مثلثاتی

۱- جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin 4x - \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{2} + 3x)$ چیست؟

جواب:

$$\sin 4x - \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{2} + 3x) \rightarrow \sin(3x + x) - \sin(3x - x) = \cos 3x$$

فرمول نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

$$\rightarrow 2 \cos 3x \sin x = \cos 3x \rightarrow \cos 3x = 0 \text{ یا } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 3x = 0 \rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\times \frac{1}{3} \text{ دو طرف}} x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ یا } x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

پس با توجه به جواب‌ها، جواب کلی عبارتست از

$$\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۲- جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin x}{\sin x} = 1$ به چه صورت است؟

جواب:

$$\frac{\sin 3x + \sin x}{\sin x} = \frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\sin x} = 1$$

$$\rightarrow \frac{\sin 3x}{\sin x} = 0 \rightarrow \sin x \neq 0, \sin 3x = 0 \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

تمرین: جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\cos 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 0$ به چه صورت است؟

۳- جواب های کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x = \sin x$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ بیان شده است. مجموعه مقادیر i چیست؟

جواب:

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = \sin x \rightarrow 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \rightarrow 2(\sin x - \frac{1}{2})(\sin x + 1) = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ یا } \sin x = -1 \rightarrow i \in \{1, 5, 9\}$$

۴- جواب کلی معادله مثلثاتی $\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - x) = 1 + \sin(\frac{5\pi}{4} + x)$ چیست؟

جواب:

$$\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - x) = \sqrt{2}(\sin \frac{\pi}{4} \cos x - \sin x \cos \frac{\pi}{4}) = \cos x - \sin x$$

$$1 + \sin(\frac{5\pi}{4} + x) = 1 + \cos x$$

$$\frac{\cos x - \sin x = 1 + \cos x}{\cos x - \sin x = 1 + \cos x} \rightarrow \sin x = -1 \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

تمرین: جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \sin^2 x = 3 \cos x$ به چه صورت است؟

۵- جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$ به چه صورت است؟

جواب:

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} \rightarrow \tan x = \sqrt{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۶- جواب کلی معادله ی مثلثاتی $2 \sin(\pi - x) \cos(\frac{3\pi}{4} + x) + 3 \cot x \sin(\pi + x) = 0$ چند است؟

جواب:

$$2 \sin x (-\sin x) + 3 \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) (-\sin x) = 0 \rightarrow \sin x \neq 0, -3 \cos x = -2 \sin^2 x$$

$$\rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0 \rightarrow 2(\cos x + 2)(\cos x - \frac{1}{2}) \xrightarrow{|\cos x| \leq 1} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

تمرین: جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin(\frac{\pi}{4} + x) \sin(\pi + x) = 0$ چیست؟

ریاضیات پاری

تمرین: جواب کلی معادله مثلثاتی $\tan(x + \frac{\pi}{4}) + \tan(x - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{3}$ به چه صورت است؟

تمرین: جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{4} + x) - 2 \sin(\pi - x) + 1 = 0$ چیست؟

فصل ۲۷

حد در بی نهایت

۱- حد کسر $\frac{x^{m+n} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1}$ با شرط $n > 3$ ، وقتی $x \rightarrow \infty$ برابر -2 است.

چند است؟

جواب:

$$m + 3 = n - 2, \quad \frac{1}{m} = -2 \rightarrow m = -\frac{1}{2}, \quad n = \frac{9}{2} \rightarrow m + n = 4$$

۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{8x^3 + 2x^2} - 2x)$ چند است؟

جواب:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{8x^3 + 2x^2} - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{\left(2x + \frac{1}{6}\right)^3 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{216}} - 2x \right)$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{8x^3 + 2x^2} - 2x) = \frac{1}{6}$$

۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right]$ چیست؟

جواب:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$$

فصل ۲۸

مجانب‌های نمودار یک تابع

۱- خط‌های مجانب منحنی تابع با ضابطه $y = \frac{2x^3 - 3x^2}{x^2 - 1}$ در دو نقطه A و B متقاطع‌اند. فاصله آن دو نقطه چند است؟

جواب:

$$y = \frac{x^2(2x - 3)}{(x - 1)(x + 1)} \rightarrow x = 1 \text{ و } x = -1 \text{ مجانب‌های قائم}$$

* ((دقت کنید اگر ریشه‌ی مخرج، ریشه صورت نیز باشد برای محاسبه مجانب‌های قائم))
عمودی)) باید حد محاسبه کرد.)) از طرفی:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)(x+1)}}{x} = 2 = k$$

و

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2}{x^2 - 1} - 2x = -3 = c$$

پس مجانب مایل آن عبارت است از: $d = kx + c = 2x - 3$ و با قراردادن $x = 1$ و $x = -1$ دو نقطه $(1, -1)$ و $(-1, -5)$ بدست می‌آید که فاصله این دو نقطه برحسب فرمول عبارتست از:

$$\sqrt{(1 - (-1))^2 + (-1 - (-5))^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۲- مجانب‌های منحنی به معادله $y = \frac{x^3 + x^2}{(x - 1)^2}$ در نقطه A متقاطع‌اند. عرض این نقطه چند است؟

جواب:

$$y = \frac{x^3 + x^2}{(x - 1)^2} \rightarrow x = 1 \text{ مجانب عمودی}$$

از طرفی:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 + x^2}{(x-1)^2}}{x} = 1 = k$$

و

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2}{(x-1)^2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - x^3 + 2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = 3 = c$$

پس مجانب مایل آن عبارت است از: $d = kx + c = x + 3$ حال کافیت برای بدست آوردن عرض نقطه A ، x را برابر یک قرار دهیم، داریم:

$$y_A = 1 + 3 = 4$$

۳- خط به معادله $y = \frac{3}{2}$ مجانب افقی نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{Ax^3 + 1}{(A-1)x^3 + 16}$ است معادله مجانب قائم نمودار تابع f چیست

جواب:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{A}{A-1} = \frac{3}{2} \rightarrow A = 3$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{3x^3 + 1}{2x^3 + 16} \xrightarrow{2x^3 + 16 = 0 \rightarrow x^3 = -8} x = -2$$

۴- معادله خطوط مجانب‌های منحنی $y = 1 + \frac{1}{x^2 - 2x}$ را بنویسید.

جواب:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1 \rightarrow y = 1 \text{ مجانب افقی}$$

$$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x = 0, x = 2 \text{ مجانب‌های عمودی}$$

تمرین: مجانب‌های منحنی به معادله $y = \frac{x^3}{x^3 + 4x + 4}$ در نقطه‌ی A متقاطع‌اند، عرض نقطه‌ی A چند است؟

۵- فاصله نقطه تلاقی مجانب‌های منحنی به معادله $y = \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - 3x + 2}$ از مبدا مختصات چند است؟

جواب:

$$\lim_{x \rightarrow 2} |f(x)| = \infty, \lim_{x \rightarrow 1} |f(x)| \neq \infty \rightarrow x = 2 \text{ تنها مجانب قائم}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0 \text{ تنها مجانب افقی}$$

پس نقطه تلاقی برابر $(2, 0)$ است و فاصله از مبدا مختصات برابر ۲ است.

تمرین: دو تابع $f(x) = \frac{x^2 + x}{x + 2}$ و $g(x) = \frac{x^2}{x - 1}$ مفروض‌اند. اگر A و B محل تلاقی مجانب‌های افقی و قائم منحنی تابع $(g - f)$ و O مبدا مختصات باشد، مساحت مثلث OAB چند است؟

۶- منحنی به معادله $y = \sqrt{(a - 1)x^2 + ax + 2 - a}$ ، دارای دو خط مجانب است. مجموعه مقادیر a چند است؟

جواب:

$$a - 1 > 0 \rightarrow a > 1$$

۷- معادله مجانب مایل نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + x^2}{x - 2}}$ ، وقتی $x \rightarrow -\infty$ چیست؟

جواب:

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x^2 + 3x + 6)(x - 2) + 12}{x - 2}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \approx |x + \frac{3}{2}| \xrightarrow{x < 0} = -x - \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-x) = -\frac{3}{2}$$

$$y = -x - \frac{3}{2} \text{ مجانب مایل}$$

۸- نقطه تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $y = 2x - \sqrt{x^2 - 2x}$ چیست؟

جواب:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - |x - 1|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y - x = 1 \rightarrow y = x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |x - 1|}{x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y - 3x = -1 \rightarrow y = 3x - 1$$

نقطه تلاقی برابر است با

$$x + 1 = 3x - 1 \rightarrow x = 1, y = 2 \rightarrow (1, 2)$$

تمرین: خطوط مجانب نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 4}$ ، در نقاط A و B متقاطع‌اند. اندازه پاره خط AB چند است؟

ریاضیات پاری

تمرین: یکی از مجانب‌های منحنی به معادله $y = \frac{2x^3 + ax^2 + 5}{x^2 + x}$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲- قطع می‌کند. a چند است؟

فصل ۲۹

مفهوم مشتق

۱- نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $y = ax^2 + bx - 9$ و $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ در نقطه‌ای به طول ۳ مماس مشترک دارند، دوتایی a و b چند هستند؟

جواب:

$$\xrightarrow{\text{در } x=3 \text{ برابر هستند}} \frac{1}{3}(3)^3 - 4(3) = -3 = a(3)^2 + 3b - 9 = 9a + 3b - 9$$

$$\xrightarrow{\text{در } x=3 \text{ مشتق‌ها (شیب خط مماس) برابر هستند}} \frac{3}{3}(3)^2 - 4 = 2a(3) + b = 5 = 6a + b$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه دو معادله دو مجهول}} a = 1, b = -1$$

۲- معادله خط قائم بر نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{x+1}{2x-1}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن چیست؟

جواب:

$$y' = \frac{-3}{(2x-1)^2} \xrightarrow{x=2} m = y'(2) = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3} \xrightarrow[\text{شیب خط عمود } mm'=-1]{m' = 3}$$

$$\rightarrow y - y(2) = 3(x - 2) \rightarrow y = 3x - 5$$

۳- تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + x$ همواره صعودی است. تغییرات a چگونه است؟

جواب:

$$\xrightarrow{\text{همواره صعودی است.}} f'(x) \geq 0 \rightarrow 3x^2 + 2ax + 1 \geq 0 \rightarrow (2a)^2 - 4(3)(1) \leq 0$$

$$\rightarrow 4a^2 - 12 \leq 0 \rightarrow a^2 \leq 3 \rightarrow |a| \leq \sqrt{3}$$

۴- اگر f یک تابع زوج باشد $f'_+(1) = 1$ و $f'_-(1) = 2$ ، آنگاه $f'_+(-1)$ چند است؟

جواب:

$$\begin{aligned} f'_+(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \xrightarrow{f(x)=f(-x)} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{-h} = -f'_-(1) = -2 \end{aligned}$$

تمرین: معادله خط قائم بر منحنی به معادله $y = \frac{x+1}{2x-1}$ در نقطه‌ای به طول ۱- چقدر است؟

۵- اگر $f(x) = |x-2| + \sqrt{2x}$ حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$ چند است؟

جواب: f در $x = 2$ پیوسته است اما مشتق‌پذیر نیست ولی:

$$\xrightarrow{x < 2} f(x) = 2 - x + \sqrt{2x} \xrightarrow{x < 2} f'_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} - 1$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{1}{2} - 1 = \frac{-1}{2}$$

۶- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sin x & ; x \geq 0 \\ ax^n & ; x < 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ مشتق مرتبه سوم

دارد. a چند است؟

جواب:

$$f_+'''(0) = \cos 0 = 1 = f_-'''(0) = n(n-1)(n-2)ax^{n-3} \rightarrow n = 3, a = \frac{1}{6}$$

تمرین: معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $y = \tan^2 x + \cos 2x$ در $x = \frac{\pi}{4}$ چند است؟

۷- اگر $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ و $g(x) = \frac{x+2}{x-4}$ تابع $f \circ g$ در کدام مجموعه نقاط مشتق ناپذیر است؟

جواب: اینگونه توابع در تمام نقاط دامنه مشتق پذیر هستند، پس:

$$\frac{x+2}{x-4} \neq -3 \rightarrow x \neq \frac{5}{2}, \quad x-4 \neq 0 \rightarrow x \neq 4$$

$$\left\{4, \frac{5}{2}\right\}$$

۸- تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} (x-1)|x-1| & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق پذیر است، a چند است؟

جواب: f در $x = 1$ مشتق پذیر است در نتیجه در $x = 1$ پیوسته است، پس

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 = f(1) = a \rightarrow a = 0$$

۹- از نقطه‌ی $A(0, -1)$ دو خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + x$ رسم شده است، شیب مثبت این مماس چند است؟

جواب: شیب خط را از دو راه مشتق و فرمول شیب گذرا از دو نقطه بدست می آوریم:

$$\frac{y - (-1)}{x - 0} = 2x + 1 \rightarrow y + 1 = 2x^2 + x \xrightarrow{y=x^2+x} x^2 + x + 1 = 2x^2 + x \rightarrow x = \pm 1 \xrightarrow{x > 0} x = 1$$

$$m = 2(1) + 1 = 3$$

تمرین: تعداد نقاط مشتق ناپذیری تابع $f(x) = ||x| - 1|$ بر روی $\mathbb{R}$ چند است؟

۱۰- خط به معادله $y = 2x - 5$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر منحنی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + 1$ مماس است. a چند است؟

جواب:

$$f(1) = 2(1) - 5 = -3 = a(1)^2 + b(1) + 1 \rightarrow a + b = -4$$

$$f'(1) = 2 \rightarrow 2a + b = 2 \xrightarrow{a+b=-4} a = 6$$

۱۱- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax - a & ; x < 1 \\ x^2 - x & ; x \geq 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه‌ی $x = 1$ مشتق پذیر است؟

جواب: ((در ابتدا نشان دهید که به ازای هر مقدار a ، f در $x = 1$ پیوسته است.))

$$f'_-(1) = f'_+(1) \rightarrow a = 2(1) - 1 = 1 \rightarrow a = 1$$

۱۲- عرض از مبدا خط مماس بر منحنی به معادله $y = \sqrt{x^2 + 3x}$ در نقطه $x = 1$ واقع بر آن چند است؟

جواب:

$$m = \frac{2(1) + 3}{2\sqrt{1^2 + 3(1)}} = \frac{5}{4} \rightarrow y - f(1) = \frac{5}{4}(x - 1) \rightarrow y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} \rightarrow \text{عرض از مبدا}$$

۱۳- در تابع با ضابطه $f(x) = |x|. [x]$ مقدار $f'(\circ^-) - f'(\circ^+)$ چند است؟

جواب:

$$f'(\circ^-) - f'(\circ^+) = 1 - 0 = 1$$

$$۱۴- \text{تابع با ضابطه } f(x) = \begin{cases} x^2; & \text{گویا } x \\ 0; & \text{گنگ } x \end{cases} \text{ در چند نقطه مشتق دارد؟}$$

جواب: این تابع فقط در $x = 0$ پیوسته است و داریم:

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

تمرین: خط مماس بر منحنی به معادله $y = x^3 + 3x^2 + 1$ ، بر خط به معادله $x - 3y = 2$ عمود است. معادله این خط مماس چیست؟

۱۵- اگر $1 < x$ ، $f(x) = x^3 - 2x$ و خط به معادله $1 \circ y = x + m$ مماس بر نمودار تابع f^{-1} باشد، آنگاه m چند است؟

جواب:

$$\xrightarrow{(x_0, y_0) \in f} (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \xrightarrow{1 \circ y = x + m \Rightarrow y = \frac{1}{1 \circ} x + \frac{m}{1 \circ}} f'(x_0) = 1 \circ$$

$$\rightarrow x_0 = 2 \rightarrow y_0 = 4 \rightarrow 1 \circ(2) = 4 + m \rightarrow m = 1 \circ$$

در تابع با ضابطه $f(x) = x\sqrt{x} + |x - 1|$ ، مقدار $f'_+(1) + 3f'_-(1)$ چند است؟

جواب: دقت کنید که

$$x < 1 : f(x) = x\sqrt{x} - x + 1 \text{ و } x \geq 1 : f(x) = x\sqrt{x} + x - 1$$

$$f'_+(1) + 3f'_-(1) = \left(\sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} + 1\right) + 3\left(\sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} - 1\right) = 4$$

فصل ۳۰

روابط و محاسبه مشتق

۱- مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه $x = 1$ برابر ۳ است. اگر $f(1) = 0$, $f'(1) = -4$ و $g'(1)$ موجود باشد، مقدار $g(1)$ کدام است؟

جواب:

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2} \xrightarrow{x=1} y'(1) = \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{(g(1))^2}$$

$$\xrightarrow{f(1)=0, f'(1)=-4, g'(1) \in \mathbb{R}} = \frac{-4g(1)}{(g(1))^2} = 3 \rightarrow g(1) = \frac{-4}{3}$$

۲- اگر $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}$ آنگاه $f'(2)$ چند است؟

جواب:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}} \left(\frac{3x-1}{2x+1} \right)' \rightarrow f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3(1)-1}{2(1)+1}}} \left(\frac{5}{(2(1)+1)^2} \right) = \frac{1}{10} = 0,1$$

۳- اگر $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ مقدار $(f^{-1})'(2)$ چند است؟

جواب:

$$y = \frac{x-1}{x+1} \rightarrow y(x+1) = x-1 \rightarrow yx+y = x-1 \rightarrow yx-x = -y-1$$

$$\rightarrow x(y-1) = -y-1 \rightarrow x = \frac{-y-1}{y-1} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-x-1}{x-1}$$

$$\rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{(-1)(-1) - (1)(-1)}{(x-1)^2} \rightarrow (f^{-1})'(2) = \frac{(-1)(-1) - (1)(-1)}{(2-1)^2} = 2$$

۴- مشتق تابع f در نقطه $x = 2$ به صورت 12 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 + k(2+h) - 2k - 8}{h} = 12$ بیان شده است، k چند است؟

جواب:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 + k(2+h) - 2k - 8}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 + 8h + 2h^2 + 2k + kh - 2k - 8}{h}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8h + 2h^2 + kh}{h} = 12 \rightarrow 8h + kh = 12h \rightarrow 8 + k = 12 \rightarrow k = 4$$

۵- اگر $y = \cos \sqrt{2}x + \sin \sqrt{2}x$ ، حاصل $\frac{y''}{y}$ چیست؟

جواب:

$$y = \cos \sqrt{2}x + \sin \sqrt{2}x \rightarrow y' = -\sqrt{2} \sin \sqrt{2}x + \sqrt{2} \cos \sqrt{2}x$$

$$\rightarrow y'' = -2 \cos \sqrt{2}x - 2 \sin \sqrt{2}x \rightarrow \frac{y''}{y} = -2$$

۶- اگر $f(x) = x^2 - x$ و $g(x) = \sqrt{2}x$ حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x)g(2+\Delta x) - f(2)g(2)}{\Delta x}$ برابر چند است؟

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x)g(2+\Delta x) - f(2)g(2)}{\Delta x} = (fg)'(2) = f'(2)g(2) + g'(2)f(2)$$

$$= (2(2) - 1)(\sqrt{2}(2)) + \frac{2}{\sqrt{2}}(2^2 - 2) = 6 + 1 = 7$$

۷- اگر $f(x) = \sin x$ ، مقدار مشتق تابع $\frac{f \circ f}{f^2}$ در $x = \frac{\pi}{2}$ چند است؟

جواب:

$$(f \circ f)(x) = \sin(\sin x) \rightarrow \frac{f \circ f}{f^2}(x) = \frac{\sin(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$\xrightarrow[\text{فرمول مشتق توابع کسری}]{\text{قاعده زنجیری}} \left(\frac{f \circ f}{f^2}\right)'(x) = \frac{\cos x \cos(\sin x) \sin^2 x - 2 \sin x \cos x \sin(\sin x)}{\sin^4 x}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} \left(\frac{f \circ f}{f^2}\right)'(\frac{\pi}{2}) = 0$$

۸- مقدار مشتق $\sin^3 \sqrt{x}$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi^2}{9}$ چقدر است؟

جواب:

$$f(x) = \sin^3 \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = (3 \sin^2 \sqrt{x}) \cdot (\cos \sqrt{x}) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi^2}{9}} f'(\frac{\pi^2}{9}) = 3 \sin^2 \sqrt{\frac{\pi^2}{9}} \cdot \cos \sqrt{\frac{\pi^2}{9}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{9}}} = \frac{27}{16\pi}$$

تمرین: مشتق تابع $f(x) = \frac{(x-1) \cdot \sqrt[4]{3x-2}}{(5x-3)^4}$ در نقطه $x = 1$ چند است؟

ریاضیات پاری

تمرین: اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ مشتق تابع $f(\tan x)$ با شرط $|x| < \frac{\pi}{2}$ چیست؟

راهنمایی:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

۹- مقدار مشتق تابع $y = \tan^3 x - \cot 2x$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{6}$ چند است؟

جواب:

$$y' = 3 \tan^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) + \frac{2}{\sin^2 2x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4$$

۱۰- مشتق $f(\sqrt[3]{6x+2})$ در نقطه $x = 1$ برابر -2 است. شیب خط قائم بر نمودار f در نقطه‌ای به طول ۲ چند است؟

جواب:

$$g(x) = f(\sqrt[3]{6x+2}) \rightarrow g'(x) = f'(\sqrt[3]{6x+2}) \left(\frac{6}{3 \sqrt[3]{(6x+2)^2}} \right) \xrightarrow{x=1} f'(2) \left(\frac{2}{4} \right) = -2$$

$$f'(2) = -4 = m \rightarrow m' = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

۱۱- اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و خط به معادله‌ی $4y + 5x = a$ قائم بر نمودار تابع f^{-1} باشد، آنگاه a چند است؟

جواب:

$$((x_0, y_0) \in f) \rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{(f^{-1})'(y_0)}$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{-1}{-\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} \rightarrow f'(x_0) = \frac{5}{4}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow x_0 = 4 \rightarrow y_0 = 6 \xrightarrow{(y_0, x_0) \in f} 4(4) + 5(6) = 46 = a$$

۱۲- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{-1}{3}$ ، مشتق $f(\sqrt{|x| + 3})$ در نقطه $x = -1$ چند است؟

جواب:

$$((x \rightarrow -1) \Rightarrow |x| = -x) \Rightarrow f(\sqrt{|x| + 3}) = f(\sqrt{-x + 3})$$

$$(f(\sqrt{-x + 3}))' = f'(\sqrt{-x + 3}) \left(\frac{-1}{3\sqrt{-x + 3}} \right) \xrightarrow{x=-1} = f'(2) \left(\frac{-1}{3} \right) = \frac{1}{12}$$

تمرین: مشتق عبارت $(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2})^2$ به ازای $x = -8$ چند است؟

۱۳- اندازه مشتق تابع $y = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ ، به ازای $x = \frac{\pi}{8}$ چند است؟

جواب:

$$y' = \frac{-2(1 + \tan^2 x)(1 + \tan^2 x) - 2(1 + \tan^2 x)(1 - \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)^2}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{8}} \frac{-2(1 + \tan^2 \frac{\pi}{8})(1 + \tan^2 \frac{\pi}{8}) - 2(1 + \tan^2 \frac{\pi}{8})(1 - \tan^2 \frac{\pi}{8})}{(1 + \tan^2 \frac{\pi}{8})^2} = \frac{-8}{4} = -2$$

۱۴- اگر $f(x) = \frac{x}{2} - \sqrt{x+2}$ ، مشتق تابع $f(xf(x))$ در نقطه $x = 2$ چند است؟

جواب:

$$(f(xf(x)))'(x) = f'(xf(x))(f(x) + xf'(x)) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{xf(x) + 2}} \right) (f(x) + x \left(-\frac{1}{2\sqrt{x+2}} \right))$$

$$\xrightarrow{x=2} \left(-\frac{1}{2\sqrt{2f(2) + 2}} \right) (f(2) + 2 \left(-\frac{1}{2\sqrt{2+2}} \right)) = \frac{-1}{2}(-1) = \frac{1}{2}$$

تمرین: مشتق چپ تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ ، در نقطه $x = 0$ چند است؟

۱۵- مقدار مشتق تابع $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right)$ ، به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ چند است؟

جواب:

$$y' = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right) \times \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right)\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-1}{4} \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2x}{4}\right)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{3}} \frac{-1}{4} \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{4}\right) = \frac{-1}{4} \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{-1}{8}$$

فصل ۳۱

آهنگ متوسط و لحظه‌ای تغییر

۱- معادله حرکت یک گلوله توپ که از زمین بطور قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود، به صورت $s = -5t^2 + 20t$ است سرعت لحظه‌ای این گلوله در زمان برخورد به زمین چند متر بر ثانیه است؟

جواب:

$$s = 0 \rightarrow t = 0 \text{ یا } t = 4, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = -10t + 20 \xrightarrow{t=4} -10(4) + 20 = -20 \text{ m/s}$$

۲- در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از ۴ به ۲۵ تغییر کند برابر با آهنگ لحظه‌ای در نقطه $x = a$ است. a چند است؟

جواب:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{4}}{25 - 4} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow \frac{1}{7} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow \sqrt{x} = \frac{7}{2} \rightarrow x = \frac{49}{4}$$

تمرین: آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 + 144}$ نسبت به متغیر x روی بازه‌ای از $x = 5$ و $x = 9$ چند است؟

۳- در تابع با ضابطه $f(x) = x + \frac{1}{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از عدد ۲ به $2+h$ تغییر کند، برابر $\frac{h}{9}$ است. h چند است؟

جواب:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{2 + h + \frac{1}{2+h} - 2 - \frac{1}{2}}{h} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{h - \frac{h}{2(2+h)}}{h} = \frac{1}{9} \rightarrow 9h - \frac{9h}{2(2+h)} = 1h \rightarrow h = \frac{9h}{2(2+h)}$$

$$\xrightarrow{h \neq 0} \frac{9}{2(2+h)} = 1 \rightarrow 2(2+h) = 9 \rightarrow 2+h = 4,5 \rightarrow h = 2,5$$

۴- اگر هزینه چاپ تعداد x کتاب حسابان به صورت $C(x) = 80000 + 150x + \sqrt[3]{x}$ باشد، هزینه چاپ 1001 امین کتاب تقریباً برابر چند است؟

جواب:

$$C(1001) - C(1000) \approx C'(1000) = 150 + \frac{75000}{3\sqrt[3]{1000^2}} = 400$$

تمرین: در تابع $f(x) = \sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر روی بازه $[2, 25]$ ، از آهنگ آنی، در شروع این بازه چقدر کمتر است؟

ریاضیات پاری

تمرین: آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 16x}$ نسبت به متغیر x روی بازه $[0, 3]$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در $x = \sqrt{2}$ ، چقدر کمتر است؟

۵- مقدار تقریبی $\cos ۲۹,۵^\circ$ با کمک دیفرانسیل (مشتق)، تقریباً چقدر بیشتر از $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است؟

جواب: ابتدا دقت کنید:

$$۰,۵^\circ \approx \frac{۱۵۷}{۱۸۰۰۰}(\text{radian}), \cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

می دانیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{6}}{x - \frac{\pi}{6}} = -\sin \frac{\pi}{6}$$

$$\rightarrow \frac{\cos ۲۹,۵^\circ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰,۵^\circ} \approx -\sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \cos ۲۹,۵^\circ \approx \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۱۵۷}{۳۶۰۰۰}$$

ریاضیات پاری

فصل ۳۲

اکسترم‌های یک تابع

۱- دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است. اگر حاصلضرب آنها مینیمم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟

جواب:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(2x=y+6 \rightarrow y=2x-6)} xy = x(2x-6) = 2x^2 - 6x & \xrightarrow{\text{چون مینیمم شده پس باید مشتق برابر صفر شود.}} 4x - 6 = 0 \\ \rightarrow x = \frac{3}{2}, y = -3 \rightarrow x + y &= \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

۲- برد تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 - 12x + 8$ بر بازه‌ی $[-3, 1]$ چیست؟

جواب:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \in (-2, 2) \rightarrow f'(x) < 0 \text{ نزولی است.}$$

$$x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \text{ صعودی است.}$$

پس با در نظر گرفتن رفتار تابع و بازه $[-3, 1]$ داریم:

$$f(-2) = 24 \rightarrow \text{ماکزیمم مطلق}, f(-3) = 17, f(1) = -3 \rightarrow \text{مینیمم در بازه مدنظر سؤال}$$

$$\rightarrow \mathcal{R}_f = [-3, 24]$$

۳- بیشترین مساحت از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که مجموع یک ضلع زاویه قائمه و وتر آن برابر ۶ باشد، چند است؟

جواب:

$$x^2 + y^2 = (6 - x)^2 \rightarrow y^2 = 36 - 12x$$

حال بجای بدست آوردن بیشترین مقدار $\frac{xy}{2}$ ، بیشترین مقدار $x^2 y^2$ را ابتدا محاسبه می‌کنیم:

$$x^2(36 - 12x) \xrightarrow{\text{مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم}} 22x - 36x^2 = 36x(2-x) = 0 \xrightarrow{x>0} x = 2, y = 2\sqrt{3}$$

$$S_{\max} = \frac{2(2\sqrt{3})}{2} = 2\sqrt{3}$$

تمرین: تعداد نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x) = |\sin x|$ بر بازه $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ چند است؟
راهنمایی: از تعریف نقاط بحرانی و رسم نمودار $|\sin x|$ استفاده کنید.

۴- طول اکسترمم تابع $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ در فاصله $[0, \pi]$ چند است؟

جواب:

$$f'(x) = \frac{\cos x(2 + \cos x) - \sin x(-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} \xrightarrow{\substack{f'(x)=0 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1}} 2 \cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{-1}{2} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = \frac{2\pi}{3}$$

تمرین: به ازای کدام مقدار k بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$ در بازه $[1, 3]$ قرینه‌ی یکدیگرند؟

۵- ماکسیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5}$ چند است؟

جواب: کافیت $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5$ مینیمم شود، پس:

$$4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \rightarrow x(4x^2 - 12x + 8) = 0 \xrightarrow{x \in \mathbb{R}} x = 0 \text{ یا } x = 1 \text{ یا } x = 2$$

$$f(0) = f(2) = \frac{1}{5} \rightarrow \max\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{5}$$

تمرین: مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = |x - ۲| \sqrt[3]{x^۲}$ چیست؟

۶- می‌نیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^۴}{۴} - \frac{x^۳}{۳} - x^۲$ روی بازه‌ی $[-۱, ۳]$ چند است؟

جواب: تابع در این بازه مشتق‌پذیر است پس:

$$f'(x) = x^۳ - x^۲ - ۲x = x(x - ۲)(x + ۱) \xrightarrow{f'(x)=0} x = ۰ \text{ یا } x = -۱ \text{ یا } x = ۲$$

پس محل نقاط می‌نیمم و ماکسیمم نسبی این طول‌ها هستند و با تعیین علامت $f''(x)$ داریم:

$$\min\{f(x) : x \in [-۱, ۳]\} = f(۲) = \frac{-۸}{۳} < f(-۱)$$

دقت کنید همیشه باید دو سر بازه را نیز در نظر بگیریم البته در اینجا با توجه به مشتق تابع و خود تابع واضح است که می‌نیمم در $x = ۳$ اتفاق نمی‌افتد.

۷- ماکسیمم تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -|x| \cos x$ در بازه‌ی $[-۱, ۱]$ چند است؟

جواب:

$$\xrightarrow{(-1 \leq x \leq 1) \rightarrow 0 \leq \cos x} (-1 \leq x \leq 1) \rightarrow -|x| \cos x \leq 0, f(0) = 0$$

$$\rightarrow \max f(x) : (-1 \leq x \leq 1) = 0$$

۸- بیشترین مقدار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sin ۲x + ۲ \cos x$ چند است؟

جواب:

$$f'(x) = ۲ \cos ۲x - ۲ \sin x \xrightarrow{f'(x)=0} ۲ \cos ۲x = ۲ \sin x \rightarrow \cos ۲x = \sin x$$

$$\rightarrow 1 - ۲ \sin^۲ x = \sin x \rightarrow ۲ \sin^۲ x + \sin x - 1 = 0 \rightarrow ۲ \left(\sin x - \frac{1}{۲}\right)(\sin x + 1) = 0$$

$$\rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ یا } \sin x = -1$$

حال با بررسی جواب‌ها، داریم:

$$\max\{\sin 2x + 2 \cos x : x \in \mathbb{R}\} = \sin \frac{\pi}{3} + 2 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

۹- کوتاه‌ترین فاصله مبدا مختصات از نقاط منحنی به معادله $y = \frac{2}{x^2}$ چند است؟

جواب: هر نقطه روی این منحنی بصورت $(x, \frac{2}{x^2})$ است، پس:

$$\text{فاصله از مبدا مختصات} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^4}}$$

پس برای بدست آوردن کمترین مقدار این فاصله باید کمترین مقدار $g(x) = x^2 + \frac{4}{x^4}$ را پیدا کنیم، داریم:

$$g'(x) = 2x - \frac{4}{x^5} \xrightarrow{g'(x)=0} x = 8x^{-5} \rightarrow x^6 = 8 \rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$\text{کوتاه‌ترین فاصله از مبدا مختصات} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + \frac{4}{(\sqrt{2})^4}} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

تمرین: می‌نیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ بر روی $\mathbb{R}$ چند است؟

تمرین: در تابع با ضابطه $f(x) = a \cos ۲x + b \sin x$ ، اگر نقطه می نیمم آن $(\frac{\pi}{۶}, -۳)$ باشد، a چند است؟

۱۰- تابع با ضابطه $f(x) = \frac{a}{x} + bx^۲$ در نقطه $(۱, -۲)$ دارای اکسترمم نسبی است. عدد a و نوع اکسترمم نسبی چیست؟

جواب:

$$f(1) = -۲ \rightarrow a+b = -۲, f'(1) = ۰ \rightarrow -a+۲b = ۰ \rightarrow a = \frac{-۴}{۳}, b = \frac{-۲}{۳}$$

با توجه به اینکه $f''(1) < ۰$ پس این اکسترمم، ماکسیمم نسبی است.

ریاضیات پاری

فصل ۳۳

جهت تقعر یک تابع و نقطه عطف

۱- به ازای کدام مقدار a تقعر تابع با ضابطه $y = ax^3 + (1 - a^2)x^2 + 3x$ در بازه $(-\infty, \frac{1}{a})$ به طرف پایین و در بازه $(\frac{1}{a}, +\infty)$ به طرف بالا است؟

جواب:

$$y' = 3ax^2 + 2(1 - a^2)x + 3 \rightarrow y'' = 6ax + 2 - 2a^2 \xrightarrow[x < \frac{1}{a} \rightarrow y'' < 0]{x > \frac{1}{a} \rightarrow y'' > 0} 6a(\frac{1}{a}) + 2 - 2a^2 = 0$$

$$-2a^2 + 3a + 2 = 0 \rightarrow 2(a - 2)(a + \frac{1}{2}) = 0 \rightarrow a = 2 \text{ یا } a = -\frac{1}{2}$$

چون باید برای بزرگتر از نیم تقعر رو به بالا باشد پس ضریب x در y'' باید بزرگتر از صفر شود.

$$\rightarrow a = 2.$$

تمرین: تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x^2 + 12}$ در بازه $(-a, a)$ رو به پایین است. بیشترین مقدار a چند است؟

۲- مجموعه طول نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = (x^2 - 28) \cdot \sqrt[3]{x}$ چیست؟

جواب:

$$f'(x) = \frac{2}{3} \sqrt[3]{x^2} - \frac{28}{3 \sqrt[3]{x^2}} = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x^2}} (x^2 - 42)$$

در نقاط بحرانی یا مشتق وجود ندارد و یا برابر صفر است.

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

→ $\{-2, 0, 2\}$

۳- اگر T دوره تناوب اصلی تابع با ضابطه $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ باشد این منحنی روی بازه $(\pi, \pi + T)$ چند نقطه عطف دارد؟

جواب:

$$y = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} \rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

با رسم نمودار تابع $\tan \frac{x}{2}$ یک نقطه عطف بدست می‌آید.

تمرین: در کدام ناحیه‌ی دستگاه محورهای مختصات تقعر نمودار تابع $y = x + \frac{1}{x}$ به سمت بالا است؟

تمرین: نقاط بحرانی $f(x) = x^2(x-2)^2$ را پیدا کنید.

۴- طول نقطه عطف نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 10x^{\frac{2}{3}}$ چند است؟

جواب:

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{20}{3}x^{-\frac{1}{3}} \rightarrow f''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{20}{9}x^{-\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{10}{9} \left(\frac{x+2}{x^{\frac{4}{3}}} \right)$$

و از آنجا که f'' فقط در $x = -2$ تغییر علامت می‌دهد پس طول نقطه عطف -2 است.

تمرین: تقعر نمودار تابع با ضابطه $y = x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{2}{3}}$ در بازه (a, b) رو به پایین است بیشترین

مقدار $b - a$ چند است؟

تمرین: تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 6x^5 - 5x^4 + 2x + 7$ در بازه $(a, +\infty)$ رو به بالا است، کمترین مقدار a چند است؟

۵- تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2+9}{x^2+12}$ در بازه (a, b) رو به بالا است، بیشترین مقدار $b - a$ چند است؟

جواب:

$$f(x) = \frac{x^2 + 12 - 12}{x^2 + 12} = 1 - \frac{12}{x^2 + 12} \rightarrow f'(x) = \frac{6x}{(x^2 + 12)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6(x^2 + 12)^2 - 6x(2x)(2(x^2 + 12))}{(x^2 + 12)^4} = \frac{6(x^2 + 12)((x^2 + 12) - 4x^2)}{(x^2 + 12)^4}$$

$$\frac{f''(x) > 0 \Rightarrow \text{تقعر نمودار رو به بالا}}{\rightarrow -3x^2 + 12 > 0 \rightarrow x \in (-2, 2) \rightarrow b - a = 2 - (-2) = 4}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & ; x \geq -1 \\ -13 - \frac{9}{x} & ; x < -1 \end{cases}$$

تمرین: مجموعه طول نقاط عطف نمودار تابع با ضابطه

چيست؟

تمرین: طول نقطه عطف منحنی به معادله $y = \frac{x}{1 + |x|}$ ، چند است؟



فصل ۳۴

قضایای متفرقه

۱- $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ زوایای داخلی یک مثلث و a و b و c اضلاع آن

اگر

$$\frac{2 \cos \hat{A}}{a} + \frac{\cos \hat{B}}{b} + \frac{2 \cos \hat{C}}{c} = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac}$$

$$\hat{A} = ?$$

جواب:

طبق قضیه کسینوس‌ها $\rightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} 2 \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} \\ \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ 2 \cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2abc} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{abc} = \frac{a^2 + b^2}{abc} \\ &\rightarrow \frac{2b^2 + 2c^2 - 2a^2 + a^2 + c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - 2c^2}{2abc} = \frac{2a^2 + 2b^2}{2abc} \end{aligned}$$

$$\rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \rightarrow \cos \hat{A} = 0 \rightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{2}$$

فصل ۳۵

احتمال

۱- می‌دانیم ۳۰ درصد از افراد جامعه‌ای دارای گروه خونی A هستند. اگر بطور تصادفی ۳ نفر از این جامعه انتخاب کنیم با کدام احتمال فقط گروه خونی دو نفر از آنها از نوع A است؟

جواب:

$$P(A) = 0/3, P(A') = 0/7 \xrightarrow{\text{فرمول برنولی}} \binom{3}{2} (0/3)^2 (0/7) = 0,189$$

۲- در آزمایشگاهی ۵ موش سالم و ۳ موش دیابتی نگهداری می‌شوند، اگر دو موش از محفظه گریخته باشند، با کدام احتمال فقط یکی از موش‌های فراری دیابتی است؟

جواب: یا فقط اولی دیابتی است یا فقط دومی، پس:

$$\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{7}\right) \times \left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

۳- ۴ لامپ از ده لامپ موجود سوخته است. اگر سه لامپ به تصادف از بین آنها اختیار کنیم، احتمال اینکه هر سه لامپ سالم باشند؟

جواب:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{cases} p(X = i) = \frac{1}{i^2 + i} & ; i \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ p(X = j) = \frac{j - 4}{a} & ; j \in \{6, 7\} \end{cases}$$

توزیع احتمال متغیر تصادفی X متناظر با ۷ برآمد به صورت

است. عدد a چند است؟

جواب: از آنجا که مجموع احتمالها باید یک شود پس

$$\sum_{k=1}^7 p(X = k) = \sum_{i=1}^5 p(X = i) + \sum_{j=6}^7 p(X = j) = 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{1^2 + 1} + \frac{1}{2^2 + 2} + \frac{1}{3^2 + 3} + \frac{1}{4^2 + 4} + \frac{1}{5^2 + 5} + \frac{2}{a} + \frac{3}{a} = 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{5}{a} = 1 \rightarrow a = 30$$

دقت کنید با استفاده از فرمول مجموع کسرهای تلسکوپی میتوان مجموع کسرها را راحتتر محاسبه کرد.

۵- احتمال آنکه دانش آموزی در درس فیزیک قبول شود ۰,۵۵ و در درس شیمی قبول شود ۰,۶ است، اگر احتمال آنکه حداقل در یکی از دو درس قبول شود ۰,۷۵ باشد، با کدام احتمال در هر دو درس قبول می شود؟

جواب:

قبولی در درس شیمی $B \rightarrow$ ، قبولی در درس فیزیک $A \rightarrow$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\rightarrow 0,75 = 0,55 + 0,6 - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = 0,4$$

۶- خانواده ای دارای چهار فرزند است می دانیم که دو فرزند اول آنها پسر است احتمال آنکه دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشد چند است؟

جواب:

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

۷- از نوعی بذر هشتاد درصد آنها جوانه می زند اگر سه بذر از این نوع کاشته شود با کدام احتمال لااقل دو بذر جوانه می زند؟

جواب: از آنجا که هشتاد درصد احتمال جوانه زدن دارند پس بیست درصد احتمال جوانه نزدن

است و طبق فرمول برنولی:

$$\rightarrow \binom{3}{2} (0,8)^2 (0,2)^1 + \binom{3}{3} (0,8)^3 = 0,384 + 0,512 = 0,896$$

تمرین: در پرتاب چهار سکه با هم احتمال اینکه فقط سه سکه رو یا فقط سه سکه پشت بیاید، چند است؟

۸- انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۱۰ درصد و به فرزند دختر ۶ درصد است. با کدام احتمال فرزندی که به دنیا می‌آید. این نوع بیماری را ندارد؟

جواب:

$$\text{احتمال داشتن بیماری} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{10}{100}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{6}{100}\right) = \frac{8}{100}$$

$$\text{احتمال نداشتن بیماری} = 1 - \frac{8}{100} = \frac{92}{100}$$

۹- نقطه $M(x, y)$ درون مثلثی با سه رأس $(0, 0)$ و $(4, 0)$ و $(3, 3)$ به تصادف انتخاب می‌شود، با کدام احتمال این نقطه روی یکی از میانه‌های مثلث قرار می‌گیرد؟

جواب: احتمال این پیشامد برابر صفر است. (چرا؟)

تمرین: از مجموعه اعداد $\{100, 101, \dots, 600\}$ عددی به تصادف انتخاب شده است با کدام احتمال این عدد مضرب ۴ یا مضرب ۹ است؟

۱۰- بر روی هر یک از چند کارت یکسان اعداد سه رقمی حاصل از جایگشت ترکیبات مجموعه اعداد $\{2, 4, 5, 6, 7\}$ را نوشته، به تصادف یک کارت از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال دو رقم از اعداد این کارت‌ها فرد می‌باشند؟

جواب:

$$p = \frac{\binom{3}{2} 3!}{\binom{5}{3} 3!} = \frac{3}{10}$$

تمرین: در پرتاب دو تاس با هم می‌دانیم جمع دو عدد رو شده کمتر از ۱۰ است. با کدام احتمال هر دو عدد رو شده فرد هستند؟

۱۱- احتمال اینکه از چهار فرزند یک خانواده دو فرزند پسر و دو فرزند دختر باشند، کدام است؟

جواب: طبق فرمول برنولی:

$$p = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

تمرین: تاس سالمی را ۱۰ بار می‌ریزیم، احتمال اینکه ۶ بار برآمد تاس، عددی بزرگ‌تر از ۳ باشد، چند است؟

۱۲- دو نفر قرار گذاشتند که بین ساعت ۷ و ۸ صبح در آزمایشگاهی حاضر شوند هرکدام زودتر رسید فقط ۶ دقیقه منتظر دیگری باشد وگرنه کار خود را شروع کند. با کدام احتمال این دو نفر قبل از شروع کار یکدیگر را ملاقات می‌کنند؟

جواب: اگر x زمان حضور نفر اول و y زمان حضور نفر دوم باشد:

$$x - 6 \leq y \leq x + 6$$

حال با رسم خطوط $x = 60$ و $y = 60$ (یک ساعت ۶۰ دقیقه است.) و $y = x - 6$ و $y = x + 6$ و بدست آوردن مساحت‌ها داریم:

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(S)} = \frac{19}{100}$$

۱۳- در یک کیسه ۵ مهره سفید و ۷ مهره سیاه موجود است. ۲ مهره از کیسه خارج می‌کنیم، احتمال اینکه دو مهره هم‌رنگ نباشند، چند است؟

جواب:

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{7}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{35}{66}$$

تمرین: دو ظرف داریم، در اولی ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه، در دومی ۷ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه است، از ظرف اول یک مهره برداشته و بدون رؤیت در ظرف دوم قرار می‌دهیم. آنگاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی این مهره سفید است؟

راهنمایی: قانون احتمال کل را بکار ببرید.

۱۴- آزمایشی فقط دو نتیجه شکست و پیروزی دارد. احتمال پیروزی $\frac{3}{4}$ است و X تعداد پیروزی‌ها در ۱۶ بار تکرار آزمایش‌ها است. $P(0 \leq X \leq 16)$ چند است؟

جواب:

چرا؟ $P(0 \leq X \leq 16) = 1$

۱۵- در آزمایشگاهی ۷ موش نگهداری می‌شوند که بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است، اگر ۲ موش از بین آنان تصادفی انتخاب شود، با کدام احتمال، لااقل بر روی یکی از آن دو، آزمون مهارت انجام شده است؟

جواب:

$$\text{احتمال آنکه بر روی هیچکدام آزمون مهارت انجام نشده باشد} = \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{3}{6}\right) = \frac{2}{7}$$

$$p = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

۱۶- اگر یک عدد سه‌رقمی با کنار هم قرار گرفتن، ارقام متمایز ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ به وجود آید، احتمال این که عدد زوج باشد؟

جواب: برای محاسبه تعداد کل حالت‌ها در نظر می‌گیریم که رقم صدگان نباید صفر باشد و برای محاسبه تعداد اعداد زوج حالتی که رقم یکان صفر باشد را جدا محاسبه کنیم بهتر است (چرا؟)، پس:

$$p = \frac{4(3) + 2(3)(3)}{4(4)(3)} = \frac{30}{48} = \frac{5}{8}$$

تمرین: روی یک محور اعداد حقیقی نقطه‌ای a روی بازه $[0, 4]$ و نقطه b روی بازه $[-1, 0]$ تصادفی انتخاب شده‌اند، با کدام احتمال فاصله این دو نقطه کمتر از دو واحد است؟

راهنمایی: از محورهای مختصات کمک بگیرید.

۱۷- برای انجام مسابقه‌ای ۴ نفر از گروه ریاضی و ۶ نفر از گروه تجربی داوطلب شده‌اند. اگر به طور تصادف ۴ نفر از بین آنان انتخاب شوند، با کدام احتمال تعداد افراد انتخابی در این دو گروه، متفاوت‌اند؟

جواب:

$$\frac{\binom{4}{0}\binom{6}{4} + \binom{4}{1}\binom{6}{3} + \binom{4}{2}\binom{6}{2} + \binom{4}{3}\binom{6}{1}}{\binom{10}{4}} = \frac{15 + 80 + 24 + 1}{210} = \frac{120}{210} = \frac{4}{7}$$

۱۸- در ظرفی شش مهره با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ ریخته شده‌اند، دو مهره با هم بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال شماره‌های این دو مهره اعداد متوالی‌اند؟

جواب:

$$A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\} \rightarrow n(A) = 5$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{\binom{6}{2}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

۱۹- تابع احتمال متغیر تصادفی x با حوزه مقادیر طبیعی به صورت $P(x = i) = \frac{1}{i^2 + i}$ است. مقدار $P(10 \leq x < 100)$ چند است؟

جواب:

$$P(x = i) = \frac{1}{i^2 + i} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i + 1}$$

$$P(10 \leq x < 100) = \sum_{i=10}^{99} P(x=i) = \sum_{i=10}^{99} \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \frac{1}{10} - \frac{1}{100} = \frac{9}{100}$$

۲۰- در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می‌شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آنها جهت آزمایشی برداشته شود، با کدام احتمال فقط یکی از موش‌های مورد آزمایش، سفید است؟

جواب:

$$p = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{3}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{7}$$

۲۱- در پرتاب یک سکه به شعاع دو سانتی‌متر بر روی یک مربع به ضلع شش سانتی‌متر، مرکز سکه همواره درون مربع قرار می‌گیرد. احتمال آنکه این سکه به تمامی درون مربع قرار گیرد، چند است؟

جواب:

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(S)} = \frac{2^2}{6^2} = \frac{1}{9}$$

تمرین: دو عدد به طور تصادفی بین ۰ و ۲ انتخاب می‌شوند با چه احتمالی نسبت این دو عدد، کمتر از $\frac{1}{3}$ است؟

۲۲- شش گوی یکسان با شماره‌های ۱ تا ۶ در یک ظرف قرار دارند، به تصادف دو گوی از آنها برمی‌داریم، با چه احتمالی جمع اعداد این دو گوی کمتر از ۶ است؟

جواب:

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)\} \rightarrow n(A) = 4$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{\binom{6}{2}} = \frac{4}{15}$$

۲۳- یک تاس همگن را انداخته‌ایم برآمد حاصل، مضرب ۳ نیست. احتمال آنکه شماره‌ی ظاهر شده ۲ باشد چند است؟

جواب:

$$S = \{1, 2, 4, 5\}, A = \{2\} \subseteq S \rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

تمرین: احتمال انتقال ویروس، از فرد بیمار به افراد مستعد ۱/۵ است. اگر این بیمار با ۴ فرد مستعد ملاقات کند، با چه احتمالی ۲ یا ۳ نفر مبتلا می‌شوند؟

۲۴- در یک خانواده سه فرزندی می‌دانیم فرزند اول دختر است، با کدام احتمال لااقل یکی از فرزندان پسر است؟

جواب: حالت‌های ممکن از لحاظ جنسیت برای دو فرزند عبارت است از ۴ حالت که در ۳ حالت حداقل یکی از فرزندان پسر است:

$$p = \frac{3}{4}$$

تمرین: یک تاس بگونه‌ای ساخته شده است که احتمال آمدن هر عدد زوج سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در یک پرتاب، احتمال وقوع عدد بزرگتر از ۳ چند است؟

۲۵- صفحه هدف مثلث متساوی‌الاضلاع به ارتفاع ۱۵ واحد است، تیر رهاشده به این صفحه هدف برخورد کرده است، با کدام احتمال فاصله محل اصابت با نزدیک‌ترین ضلع این مثلث بیشتر از یک واحد است؟

جواب:

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(S)} = \frac{48 \sqrt{3}}{75 \sqrt{3}} = 0,64$$

حتماً مثلث‌ها را رسم کنید.

تمرین: با کدام احتمال رقم سمت راست پلاک اولین اتومبیلی که از بزرگراه خارج می‌شود از ۴ بیشتر نیست یا مضرب ۳ می‌باشد؟ (رقم صفر در پلاک اتومبیل بکار نمی‌رود.)

۲۶- در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می‌شوند. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آن‌ها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟

جواب:

$$p = \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{4}{7}\right) \left(\frac{3}{6}\right) + \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{3}{7}\right) \left(\frac{2}{6}\right) = \frac{15}{56}$$

تمرین: دانش‌آموزی به ۶ پرسش تستی سه گزینه‌ای، به تصادف پاسخ می‌گوید. احتمال اینکه فقط به ۴ پرسش پاسخ درست بدهد، چند است؟

۲۷- از هر گروه آزمایشی به ترتیب ۱، ۲، ۳، ۳ نفر داوطلب شرکت در آزمونی هستند. اگر به تصادف ۴ نفر از بین آنان معرفی شوند، با چه احتمالی از هر گروه یک نفر معرفی شده‌اند؟

جواب:

$$\frac{\binom{1}{1} \binom{2}{1} \binom{3}{1} \binom{3}{1}}{\binom{1+2+3+3}{4}} = \frac{1}{7}$$

تمرین: بر روی محور اعداد حقیقی، دو نقطه تصادفی به طول a و b به طوری که $0 \leq a \leq 2$ و $0 \leq b \leq 1$ - انتخاب می‌شوند با چه احتمالی فاصله این دو نقطه بزرگتر از ۲ است؟

۲۸- اعداد ۱ تا ۶ را بر روی ۶ کارت یکسان نوشته‌اند. اگر به تصادف دو کارت از بین آنها بیرون می‌آوریم، با چه احتمالی جمع اعداد این دو کارت زوج است؟
جواب:

$$A = \{(1, 3), (1, 5), (2, 4), (2, 6), (3, 5), (4, 6)\} \rightarrow n(A) = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{\binom{6}{2}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

تمرین: توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت $P(X = i) = \frac{1}{i(i+1)}$; $i = 1, 2, 3, \dots$ تعریف شده است. $P(X \geq 5)$ چند است؟

۲۹- حروف کلمه ATAXIA را بریده به طور تصادفی کنار هم قرار می دهیم. با چه احتمالی هر سه حرف A کنار هم قرار می گیرند؟

جواب:

$$p = \frac{4!}{\frac{6!}{3!(1!)(1!)}} = \frac{1}{5}$$

۳۰- دو ظرف همانند، اولی دارای ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و دومی دارای ۶ مهره سفید و ۸ مهره سیاه است. با چشم بسته یکی از این دو ظرف را اختیار کرده و مهره‌ای از آن بیرون می آوریم. احتمال اینکه مهره سفید باشد، چند است؟

جواب: طبق قانون احتمال کل

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{6}{10}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{6}{14}\right) = \frac{36}{70} = \frac{18}{35}$$

تمرین: احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند ۰,۰۲۵ و احتمال به افراد دیگر ۰,۲ است. $\frac{2}{5}$ کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می شود؟

ریاضیات پاری

۳۱- از نوعی بذر که ۸۰ درصد آنان جوانه می زنند، ۵ عدد کاشته شده است. با کدام احتمال حداقل دو عدد از آنان جوانه می زنند؟

جواب: ابتدا احتمال پیشامد متمم را حساب می کنیم، یعنی احتمال جوانه زدن یک یا هیچ بذر:

$$p' = \binom{5}{0}\left(\frac{2}{10}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{2}{10}\right)^4\left(\frac{8}{10}\right)^1 = \frac{32 + 640}{100000}$$

$$p = 1 - p' = \frac{99328}{100000}$$

تمرین: بر روی بازه $[0, 1]$ دو نقطه به تصادف انتخاب می کنیم، که بازه را به سه پاره خط تقسیم کند. با چه احتمالی با سه پاره خط حاصل می توانیم مثلث ساخت؟

۳۲- در دو جعبه به ترتیب ۲۴ و ۱۵ لامپ یکسان موجود است. در جعبه اول ۴ عدد و در جعبه دوم ۳ عدد لامپ معیوب‌اند. از اولی ۸ و از دومی ۶ لامپ به تصادف برداشته و در جعبه جدید قرار می‌دهیم. با چه احتمالی یک لامپ انتخابی از جعبه جدید معیوب است؟

جواب:

$$p = \frac{\frac{4}{24}(8) + \frac{3}{15}(6)}{8 + 6} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{6}{5}}{14} = \frac{38}{210} = \frac{19}{105}$$

تمرین: سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید، تاس را می‌ریزیم و اگر پشت بیاید سه سکه دیگر را با هم می‌ریزیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود، چند است؟

ریاضیات پاری

۳۳- در یک ظرف ۵ گوی قرمز با شماره‌های یک تا پنج و چهار گوی آبی با شماره‌های یک تا چهار قرار دارند. به طور تصادف یک گوی از هر رنگ خارج می‌کنیم. با چه احتمالی لااقل شماره‌ی یکی از آنها عدد دو است؟

جواب:

گوی آبی رنگ شماره‌اش عدد دو باشد. $B :=$, گوی قرمز رنگ شماره‌اش عدد دو باشد. $A :=$

$$p(A \cup B) = P(A) + p(B) - p(A \cap B) \rightarrow p(A \cup B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{10}$$

فصل ۳۶

هندسه تحلیلی

۱- شیب خط قائم بر بیضی به معادله $x^2 + 3y^2 - 8x = 0$ در نقطه برخورد آن بیضی با نیمساز ناحیه اول و در این ناحیه چند است؟

جواب:

$x = y \rightarrow x^2 + 3x^2 - 8x = 0 \rightarrow x = 0$ یا $x = 2$ معادله خط نیمساز ناحیه اول

در ناحیه اول (مدنظر سؤال) $\rightarrow x = 2$

$$-\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x - 8}{6y} \xrightarrow{x=y=2} -\frac{2(2) - 8}{6(2)} = \frac{1}{3}$$

فرمول شیب خط عمود $\xrightarrow{} m = -3$

$$\frac{1}{3}m = -1$$

۲- اگر $\vec{d} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ آنگاه کسینوس زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{d} - \vec{b}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

جواب:

$$\vec{d} - \vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j}$$

پس

$$\cos \theta = \frac{(\vec{d} - \vec{b}) \cdot (\vec{b})}{|\vec{d} - \vec{b}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1 - 4 + 0}{\sqrt{17} \sqrt{3}} = -\sqrt{\frac{3}{17}}$$

۳- دو بردار a و b به طول‌های ۵ و ۸ واحد مفروض‌اند. مساحت مثلث تولیدشده توسط این دو بردار ۱۲ واحد مربع است. اگر زاویه بین دو بردار کمتر از قائمه باشد، اندازه تفاضل بین دو بردار چند است؟

جواب:

$$\text{مساحت مثلث تولیدشده} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \Rightarrow 12 = \frac{1}{2} (5)(8)(\sin \theta)$$

$$\rightarrow \sin \theta = \frac{3}{5} \xrightarrow[\theta < \frac{\pi}{2}]{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1} \cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$$

$$\rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 25 + 64 - 64 = 25 \xrightarrow{|\vec{a} - \vec{b}| > 0} |\vec{a} - \vec{b}| = 5$$

۴- حجم محدود به صفحه به معادله $x + y + 2z = 1$ و صفحات مختصات کدام است؟
جواب: با بدست آوردن نقاط تقاطع داریم:

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, \frac{1}{2})$$

پس طبق فرمول:

$$\text{حجم محدود} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{12}$$

۵- فاصله دو کانون مقطع مخروطی به معادله $x^2 + xy + y^2 = 6$ چند است؟

جواب: در معادله $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = F$ با قرار دادن

$$M := \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$$

فرم استاندارد معادله بصورت $k_1 x^2 + k_2 y^2 = F$ است که در آن k_1 و k_2 ریشه‌های معادله زیر هستند:

$$k^2 - (A + C)k + |M| = 0$$

پس با توجه به اینکه در این سؤال $A = B = C = 1$ داریم:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}$$

پس

$$k^2 - 2k + \frac{3}{4} = (k - \frac{3}{2})(k - \frac{1}{2})$$

پس فرم استاندارد بصورت زیر است:

$$\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 6 \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$$

پس

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = 12 - 4 = 8 \rightarrow c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \rightarrow \text{فاصله دو کانون} = 2c = 4\sqrt{2}$$

۶- طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطه $A(-1, 0)$ ، $B(3, 0)$ و $C(0, -3)$ می‌گذرد، چند است؟

جواب: معادله دایره در حالت کلی بصورت زیر است:

$$x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$$

و چون این دایره از سه نقطه $A(-1, 0)$ ، $B(3, 0)$ و $C(0, -3)$ گذشته است پس

$$1 - a + c = 0, \quad 9 + 3a + c = 0, \quad 9 - 3b + c = 0$$

پس

$$a = -2, \quad b = 2, \quad c = -3$$

و طبق فرمول:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 12} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

۷- دهانه سهمی به معادله $y^2 + a(x - y) = 0$ رو به راست باز می‌شود و فاصله کانون تا خط هادی آن ۲ واحد است. مختصات کانون این سهمی چیست؟

جواب:

$$2p = 2 \rightarrow p = 1, \quad y^2 - ay = -ax \xrightarrow{p=1} -a = 4 \rightarrow a = -4$$

$$y^2 + 4y = 4x \rightarrow (y + 2)^2 = 4(x + 1) \rightarrow S(-1, -2) \rightarrow F(0, -2)$$

۸- خط Δ بر صفحه P عمود است چند صفحه موجود است که از خط Δ بگذرد و بر صفحه P عمود باشد؟

جواب: بی شمار

۹- تصویر قائم بردار $(0, -3, 6)$ روی امتداد بردار $(2, -1, -2)$ چه برداری است؟

جواب: طبق فرمول

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \rightarrow \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \rightarrow \frac{0 + 3 - 12}{9} (2, -1, -2)$$

$$= (-2, 1, 2)$$

۱۰- دو خط به معادلات $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{-1}$ و $(x=t, y=t+2, z=-2t-1)$ نسبت به هم کدام وضعیت را دارند؟

جواب: این دو خط موازی یا عمود برهم نیستند پس یا متقاطع اند یا متنافر

$$\frac{t-1}{2} = \frac{t+2-4}{3} = \frac{-2t-1}{-1} \rightarrow t = -1$$

پس متقاطع هستند.

۱۱- صفحه شامل دو خط موازی $(x=2t+1, y=t-1, z=t)$ و $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟

جواب: معادله صفحه بصورت زیر است:

$$a(x)+b(y)+c(z-2)=0 \xrightarrow{(3,0,1), (1,-1,0), (-1,-2,-1)} a=1, b=-5, c=3$$

$$\rightarrow 1(x)-5(y)+3(z-2)=0 \rightarrow x-5y+3z-6=0 \xrightarrow{\text{محور } x \rightarrow y=z=0} \rightarrow x=6$$

تمرین: دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13$ و $x^2 + y^2 + 2x = 1$ در دستگاه مختصات رسم کنید.

تمرین: خط به معادله $y = 1$ محور تقارن و خط $x = 2$ خط هادی در یک سهمی‌اند. اگر این سهمی از نقطه $(3, 2)$ بگذرد، فاصله کانون تا خط هادی آن کدام است؟

۱۲- اگر $|\vec{a}| = 2\sqrt{6}$ و $|\vec{b}| = 5$ و $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = 0$ ، اندازه بردار $\vec{a} - \vec{b}$ چند است؟

جواب:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 49 \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = 7$$

تمرین: نقطه $(a, b, 4)$ بر روی خط گذرنده بر دو نقطه $(1, -1, 0)$ و $(0, 1, 2)$ واقع است، دوتایی مرتب (a, b) چیست؟

ریاضیات پاری

۱۳- معادله صفحه گذرنده بر دو نقطه $(2, 3, -1)$ و $(0, 1, 1)$ موازی محور x ‌ها چیست؟

جواب:

$$\xrightarrow{\text{ضرب } x \text{ صفر است.} \rightarrow \text{موازی محور } x \text{ ها}} y + az = b \xrightarrow{\text{جایگذاری دو نقطه}} y + z = 2$$

۱۴- دسته خطوط به معادلات $(m+2)y + (m+1)x + 1 = 0$ قطرهای یک دایره‌اند. اگر این دایره از نقطه $(5, 2)$ بگذرد، شعاع آن چقدر است؟

جواب: مرکز دایره محل تقاطع این خطوط است، پس:

$$\xrightarrow{m=-2} x = 1, \xrightarrow{m=-1} y = -1 \rightarrow (1, -1) \text{ مرکز دایره}$$

$$r = \sqrt{(5-1)^2 + (2-(-1))^2} = 5$$

۱۵- سهمی با کانون $F(1, 1)$ و خط هادی به معادله $x = 3$ محور y ها را در دو نقطه A و B قطع می‌کند، فاصله AB چند است؟

جواب:

$$F = (\alpha + a, \beta) = (1, 1), \alpha - a = 3 \rightarrow \alpha = 2, a = -1, \beta = 1 \rightarrow (y-1)^2 = -4(x-2)$$

$$x = 0, y = 1 \pm 2\sqrt{2} \rightarrow A(0, 1-2\sqrt{2}), B(0, 1+2\sqrt{2}) \rightarrow |AB| = 4\sqrt{2}$$

۱۶- دو بردار a و b به طول‌های ۳ و ۴ با یکدیگر زاویه‌های 30° درجه می‌سازند. مساحت مثلثی که بر روی دو بردار $a - 2b$ و $3a + 2b$ تولید شود چند است؟

جواب:

$$S = \frac{1}{2} |((a-2b) \times (3a+2b))| = \frac{1}{2} |(6a \times b - 2b \times a)| = \frac{1}{2} |(6a \times b + 2a \times b)|$$

$$4|a \times b| = 4|a||b| \sin 30^\circ = 24$$

تمرین: طول قطعه مماسی که از نقطه‌ی $A(4, 1)$ بر دایره‌ای به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ رسم شود برابر چند است؟

راهنمایی: ابتدا مرکز را به نقطه A وصل کنید، سپس با توجه به قضیه فیثاغورس و اینکه شعاع در نقطه تماس بر مماس عمود است، طول خط مماس را بدست آورید.

تمرین: تعداد نقاطی از صفحه مختصات که درون دایره‌ای به معادله‌ی $x^2 + y^2 = 16$ قرار داشته و هر دو مختص آن نقاط عددی صحیح باشند، چند است؟

۱۷- از دستگاه معادلات $x + y = 2$ و $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z + 2$ مقدار $2x + y - 2z$ و 16 مقدار $x + y$ چند است؟

جواب:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z + 2 \rightarrow x = 2z + 5, y = 3z + 6$$

$$\xrightarrow{2x+y-2z=16} 2(2z+5) + (3z+6) - 2z = 16 \rightarrow 5z + 16 = 16 \rightarrow z = 0, y = 6, x = 5$$

$$x + y = 5 + 6 = 11$$

۱۸- به ازای کدام مقدار a دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$ بر خط $x + 3y = 0$ مماس است؟

جواب:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = (x-1)^2 + (y+2)^2 = -a + 5 \rightarrow O = (1, -2), r = \sqrt{-a + 5}$$

$$r = \text{فاصله مرکز تا خط مماس} = \frac{|1 + 3(-2)|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \sqrt{\frac{10}{4}}$$

$$r = \sqrt{-a + 5} = \sqrt{\frac{10}{4}} \rightarrow -a + 5 = \frac{10}{4} \rightarrow a = \frac{5}{2}$$

۱۹- اگر بردار $\vec{a} = (m, 2, -1)$ و $|\vec{b}| = \sqrt{41}$ ، دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ عمود برهم باشند، مقدار مثبت m چند است؟

جواب:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$$

$$\rightarrow m^2 + 4 + 1 = 41 \rightarrow m^2 = 36 \rightarrow m = 6 > 0$$

۲۰- زاویه بین دو بردار a و b کمتر از 90° درجه است، اگر $|\vec{a}| = 6$ ، $|\vec{a} \times \vec{b}| = 5$ و $|\vec{a} + \vec{b}| = 18$ حاصل $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ چند است؟

جواب:

$$|\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b})| = |\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}| = 18 \rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 18$$

$$\rightarrow |\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta = 30(\sin \theta) = 18 \rightarrow \sin \theta = \frac{3}{5} \rightarrow \cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = 60$$

تمرین: به ازای کدام مقدار a دو خط به معادلات $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$ و $\frac{x-3}{1} = \frac{y+a}{2} = -z$ متقاطع اند؟

۲۱- نقطه M واقع بر خط به معادله $y = 0$ و $x = 2z + 3$ است، اگر فاصله M از صفحه‌ای به معادله $2x + 2y - z = 0$ برابر 5 باشد، ارتفاع مثبت نقطه M چند است؟

جواب:

$$x = t, z = \frac{t-3}{2} \xrightarrow{M(t_0, \frac{t_0-3}{2})} \frac{|2t_0 - \frac{t_0-3}{2}|}{\sqrt{4+4+1}} = 5$$

$$t_0 = 9 \rightarrow M = (9, 0, 3) \rightarrow \text{ارتفاع} = 3$$

تمرین: کانون‌های بیضی به معادله $۲x^۲ + ۷y^۲ - ۴x = ۱۲$ دو سر قطری از دایره‌اند، این دایره نیمساز ناحیه اول را با کدام طول قطع می‌کند؟

۲۲- دایره به مرکز $(۲, ۰)$ و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادله‌ی $y = ۱$ را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

جواب: فاصله مرکز دایره از خط مماس همان شعاع دایره است و از آنجا که معادله نیمساز ربع اول، $y - x = ۰$ است، پس

$$r = \frac{|-۲|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{۲}$$

پس باید فاصله‌ی آن نقاط روی دایره با عرض ۱ نیز از مرکز $\sqrt{۲}$ باشد، پس:

$$\sqrt{۲} = \sqrt{(x-۲)^۲ + (۱-۰)^۲} \rightarrow x = ۳ \text{ یا } x = ۱$$

تمرین: در سهمی به معادله‌ی $۲y = ۶x + ۸ - x^۲$ معادله خط هادی چیست؟

۲۳- نقطه‌ی $M(x, y)$ بر روی بیضی به معادله‌ی $۹y^۲ + ۴x^۲ - ۸x = ۸$ قرار دارد. مجموع فواصل نقطه‌ی M از دو کانون بیضی چند است؟

جواب: پاسخ همان قطر بزرگ است، پس:

$$۹y^۲ + ۴x^۲ - ۸x = ۸ \rightarrow ۹y^۲ + ۴(x-۱)^۲ = ۱۲ \rightarrow \frac{y^۲}{\frac{۱۲}{۹}} + \frac{(x-۱)^۲}{۳} = ۱$$

$$a^۲ = ۳ \xrightarrow{a>۰} a = \sqrt{۳} \rightarrow ۲a = ۲\sqrt{۳}$$

تمرین: به ازای کدام مقدار a حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{j} + 5\vec{i} - 2\vec{i} + 5\vec{j}$ و $\vec{j} - 3\vec{i} - a\vec{i}$ برابر -3 است؟

تمرین: خط از دو نقطه‌ی $A(-1, 2, 1)$ و $B(2, 1, -1)$ چه معادله خطی دارد؟

تمرین: به ازای کدام مقدار b دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4y + b = 0$ مماس داخل‌اند؟

۲۴- در بیضی به معادله $x^2 + 2y^2 - 2x = 1$ اندازه وترى که از کانون بیضی بر قطر بزرگ آن عمود شود، چند است؟

جواب: می‌دانیم طول وتر عمود بر قطر بزرگ که از کانون بگذرد برابر است با: $\frac{2b^2}{a}$ ، پس:

$$(x-1)^2 + 2y^2 = 2 \rightarrow \frac{(x-1)^2}{2} + y^2 = 1 \rightarrow a = \sqrt{2}, b = 1 \rightarrow \frac{2b^2}{a} = \sqrt{2}$$

تمرین: اگر $a = (1, -2, 3)$ و $b = (2, 0, 1)$ ، مساحت متوازی الاضلاع تولیدشده توسط دو بردار $a + 3b$ و $a + 5b$ ، چند است؟

۲۵- دو دایره از نقطه $(2, 1)$ گذشته و بر محورهای مختصات مماس‌اند، شعاع این دایره‌ها چند است؟

جواب: در این دایره‌ها شعاع همان فاصله مرکز با محورهای مختصات است و از آنجا که شعاع دایره همیشه ثابت است پس فاصله مرکز از محور طول‌ها با فاصله مرکز از محور عرض‌ها برابر است، در نتیجه طول و عرض مرکز این دایره‌ها یکی است:

$$r^2 = (r - 2)^2 + (r - 1)^2 \rightarrow r = 1 \text{ یا } r = 5$$

۲۶- بیشترین مساحت از بین مثلث‌هایی که یک رأس آن روی بیضی به معادله $4x^2 + y^2 = 3$ و دو رأس دیگر آن کانون‌های این بیضی باشند، چند است؟

جواب:

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 3 + 1 = 4 \rightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = 2^2 - 1^2 = 3 \rightarrow c = \sqrt{3} \xrightarrow{S = \frac{rbc}{2}} S = \sqrt{3}$$

۲۷- اگر $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| = |\vec{b}|$ باشند، زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چند درجه است؟

جواب: بدون استفاده از فرمول و با استفاده مفهوم هندسی جمع بردارها این سه بردار برابر با هم مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند، پس:

$$\vec{b} \text{ و } \vec{a} \text{ دو بردار بین } 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

تمرین: هر خط قائم بر یک دایره، از نقطه $(1, -2)$ می‌گذرد. این دایره بر خط به معادله $y = x - 1$ مماس است. شعاع دایره چند است؟

تمرین: در سهمی به معادله $y^2 + 4y + 2x + 1 = 0$ معادله خط هادی آن چیست؟

۲۸- دو بردار با تصاویر $a = (1, 2, -1)$ و $b = (2, 4, m)$ مفروض اند. به ازای کدام مقادیر m ، اندازه بردار $(a + b) \cdot (a \times b)$ برابر صفر است؟

جواب: $(a + b) \cdot (a \times b)$ بر $a \times b$ عمود است پس همیشه و به ازای هر مقدار m برابر صفر است.

۲۹- طول عمود مشترک دو خط به معادلات $(x = 0, y - z = 0)$ و $(x = 2, z = 0)$ ، چند است؟

جواب: با توجه به مقدار ثابت x در دو خط، داریم: $d = 2$

۳۰- فاصله نقطه $M(x, y)$ از نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر محور x ها، برابر نصف فاصله همین نقطه از خط به معادله $y = 3$ است. در منحنی مکان هندسی M اندازه بزرگترین وتر چند است؟

جواب:

$$|MA| = \frac{1}{2}|MH| \rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \frac{1}{2}|y-3| \rightarrow 4(x-1)^2 + 3(y+1)^2 = 12$$

$$\rightarrow \frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \rightarrow |AA'| = 2a = 4$$

۳۱- مساحت چهارضلعی حاصل از اثر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ روی مربع با دو رأس متقابل $(1, 1)$ و $(-1, -1)$ چند است؟

جواب: طبق فرمول، مساحت در اثر ماتریس A بگونه‌ی زیر تغییر می‌کند:

$$S' = ||A| \cdot S| \rightarrow S' = 3(4) = 12$$

۳۲- یک تلسکوپ دارای آینه سهموی است که فاصله رأس تا کنون ۷۲ سانتی‌متر و قطر قاعده آن ۱۶۸ سانتی‌متر است. عمق آینه در مرکز، چند سانتی‌متر است؟

جواب:

$$\left(\frac{168}{2} = 84, y\right) \\ x^2 = 4py \xrightarrow{p=72} 84^2 = 4(72)y \rightarrow y = 24.5$$

تمرین: دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با تصویرهای $(1, \alpha + 1, 2\alpha)$ و $(2, 0, -1)$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقادیر α بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ عمود برهم‌اند؟

۳۳- مساحت مثلث ABC ، با سه رأس $A(1, -2, 3)$ و $B(2, 0, 1)$ و $C(-3, 2, 1)$ ، چند است؟

جواب:

$$AB = 3 = c, AC = 6 = b, BC = \sqrt{29} = a$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \rightarrow \cos A = \frac{4}{9} \rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{65}}{9}$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A \rightarrow S = \frac{3(6)\sqrt{65}}{18} = \sqrt{65}$$

تمرین: معادله دایره‌ای که مرکز آن به طول ۱- و بر دو خط به معادلات $y = x + 4$ و $y = x$ مماس باشد، چیست؟

تمرین: دایره‌ای از نقطه $(-1, 2)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره بزرگ‌تر چند است؟

تمرین: در بیضی به معادله $۳x^۲ + ۴y^۲ = ۱۲$ ، یک خط از کانون بر قطر بزرگ آن عمود می‌کنیم، تا بیضی را در A و B قطع کند. طول وتر AB چند است؟



فصل ۳۷

ماتریس

۱- از تساوی $\begin{vmatrix} ab & bc & ca \\ 1 & 1 & 1 \\ c(a+b) & a(b+c) & b(a+c) \end{vmatrix} = 0$ در مورد a, b و c چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

جواب: با اضافه کردن سطر اول به سطر سوم داریم:

$$\begin{bmatrix} ab & bc & ca \\ 1 & 1 & 1 \\ ab + bc + ac & ab + bc + ac & ab + bc + ac \end{bmatrix}$$

که در آن سطر سوم $(ab + bc + ac)$ برابر سطر اول است، پس به ازای همه مقادیر a, b و c دترمینان برابر صفر است.

۲- در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = -1 \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب مجهولات به صورت

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ است، } x + y \text{ چند است؟}$$

جواب: کافیهست ماتریس معکوس ضرایب را دوباره معکوس کنیم تا ماتریس ضرایب بدست آید:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (0)(1) - (-1)(2) = 2$$

پس ماتریس ضرایب برابر است با:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & +1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

با قرار دادن بجای a, b, c و d داریم:

$$x = 1, y = 3 \rightarrow x + y = 4$$

راه حل آسان تر استفاده از:

$$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$$

۳- اگر $a + b + c = -5$ باشد حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} a & b & c+2 \\ a & b+2 & c \\ a+2 & b & c \end{vmatrix}$ چند است؟

جواب: با محاسبه داریم:

$$a(2c) + b(2c) + (c+2)(-2a-2b-4) = -4c - 4a - 4b - 8$$

$$= -4(a+b+c) - 8 = -4(-5) - 8 = 12$$

تمرین: اگر ماتریس $\begin{bmatrix} -6 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ a & -1 & 0 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد a چه مقادیری می تواند داشته باشد؟
راهنمایی: دترمینان ماتریس وارون ناپذیر باید صفر شود.

۴- اگر $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه های سطر اول ماتریس معکوس A^{-1} چند است؟

جواب:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

پس

$$|A^{-1}| = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -14 - (-18) = 4$$

و در نتیجه

$$(A^p)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{-1}{2} + \frac{-3}{2} = -2$$

تمرین: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^v - A^f$ را محاسبه کنید.

۵- اگر $abc \neq 0$ باشد، از معادله $\begin{vmatrix} 1 & a+1 & b+1 \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$ چه نتیجه‌ای در مورد a, b, c می‌توان گرفت؟

جواب:

$$c^2 - (a+1)bc + (b+1)ac = c^2 - abc - bc + abc + ac = c(c-b+a) = 0 \rightarrow a-b+c = 0$$

تمرین: اگر دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & m & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ با دترمینان ماتریس وارون A برابر باشد، m چند است؟

راهنمایی:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

تمرین: در ماتریس $A = \begin{bmatrix} a+x & a & a \\ b & b+x & b \\ c & c & c+x \end{bmatrix}$ اگر مجموع تمام درایه‌ها ۶ و $|A| = 6$

باشد، x چند است؟

تمرین: اگر $A = \frac{1}{p} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ p & 0 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس A^{-1} چند است؟

تمرین: در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = f \\ cx + dy = 1 \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب مجهولات، به صورت $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ p & -1 \end{bmatrix}$ است. اگر $x = 1$ ، مقدار y چند است؟

تمرین: ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ را به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن نوشته ایم. دترمینان ماتریس متقارن چند است؟

راهنمایی:

$$A = \frac{1}{p}(A + A^t) + \frac{1}{p}(A - A^t)$$

که در آن $\frac{1}{p}(A + A^t)$ متقارن و $\frac{1}{p}(A - A^t)$ پادمتقارن است.

۶- اگر A یک ماتریس پادمتقارن و $(I - A)$ وارون پذیر باشد آنگاه $((I + A)^{-1})^t(I - A)$ برابر چیست؟

جواب:

$$((I + A)^{-1})^t(I - A) = ((I + A)^t)^{-1}(I - A) = (I + A^t)^{-1}(I - A) \xrightarrow{A^t = -A} (I - A)^{-1}(I - A) = I$$

تمرین: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ، عنصر سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^{-1} چند است؟

۷- دترمینان ضرایب دستگاه معادله‌های
$$\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ x + by + 3z = 2 \\ cx + 2y - z = -1 \end{cases}$$
 برابر ۴ است. اگر $x =$

$\frac{1}{p}$ آنگاه b چند است؟

جواب: به روش کرامر

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & b & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & b & 3 \\ c & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{-1 + b + 2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow b = 1$$

تمرین: اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ -۴ & ۵ \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $A^۲ + A$ چند است؟



تمرین: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، به ازای کدام مقدار a ماتریس $A.A^t$ وارون پذیر است؟

۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس $(\frac{1}{2}A)^3$ چند است؟

جواب:

$$\frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}$$

پس

$$\left(\frac{1}{2}A\right)^3 = \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} = -I$$

۹- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} a+1 & 2 \\ -1 & a-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}$ جواب دارد؟

جواب: کافیت ماتریس

$$\begin{bmatrix} a+1 & 2 \\ -1 & a-1 \end{bmatrix}$$

وارون پذیر باشد، یعنی:

$$\begin{vmatrix} a+1 & 2 \\ -1 & a-1 \end{vmatrix} = a^2 + 1 \neq 0 \rightarrow a \in \mathbb{R}$$

تمرین: حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1+x & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}$ ، با شرط $y = x + z$ چند است؟

۱۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$ ، سطر اول ماتریس $A^{-1}.A^t$ چند است؟
جواب:

$$|A| = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 x & \sin x \cos x \\ -\sin x \cos x & \cos^2 x \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix}$$

پس

$$\begin{aligned} A^{-1}.A^t &= \begin{bmatrix} \cos^2 x & \sin x \cos x \\ -\sin x \cos x & \cos^2 x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 x - \sin^2 x & 2 \sin x \cos x \\ -2 \sin x \cos x & \cos^2 x - \sin^2 x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۱۱- $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ مفروض است. دترمینان ماتریس $(\frac{1}{2}A.A^t)$ چند است؟
جواب:

$$|A| = 24 \rightarrow |A^t| = 24 \rightarrow |\frac{1}{2}A.A^t| = (\frac{1}{2})^3 24(24) = 72$$

۱۲- اگر a و b دو عدد حقیقی و i و j شماره سطر و ستون هر درایه باشند، دترمینان ماتریس $A = [ai + bj]_{3 \times 3}$ چند است؟

جواب: صفر

۱۳- اگر A یک ماتریس مربعی باشد بطوریکه

$$A^2 \neq 0$$

و

$$A^3 = 0$$

، آنگاه معکوس ماتریس $I - A$ به چه صورت است؟

جواب:

$$I = I^3 = I^3 - 0 = I^3 - A^3 = (I - A)(A^2 + A + I) \rightarrow (I - A)^{-1} = (A^2 + A + I)$$

تمرین: اگر $A^3 = 28I$ باشد، $(A - 3I)^{-1}$ بر حسب A بدست آورید.

۱۴- چند ماتریس 3×3 مانند A وجود دارد بطوریکه:

$$A^2 = A, \det(I - A) \neq 0$$

جواب: از آنجا که دترمینان $I - A$ صفر نیست، پس $I - A$ وارونپذیر است و داریم:

$$A^2 = A \implies A^2 - A = 0 \implies A(I - A) = 0$$

$$\xrightarrow{\times(I-A)^{-1}} AI = 0 \implies A = 0$$

پس تنها یک ماتریس با تمام درایه‌های صفر در این شرایط صدق می‌کند.

تمرین: اگر

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, BA^n = \begin{bmatrix} 4 & 41 \\ 3 & 32 \end{bmatrix}$$

n چند است؟

فصل ۳۸

مقدمات ریاضیات گسسته

۱- در اصل استقرای تعمیم یافته، برای حکم: $n \geq m$ ، $(n+1)! < 4^n$ عدد طبیعی مناسب m چند است؟

جواب:

$$4^5 = 1024 > (5+1)! = 720, \quad 4^6 = 4096 < (6+1)! = 5040 \rightarrow m = 6$$

۲- ۶۵ کبوتر در حداکثر چند لانه کبوتر قرار بگیرند تا حداقل در یک لانه بیش از دو کبوتر قرار داشته باشد؟

جواب:

$$2n < 65 \rightarrow n < \frac{65}{2} = 32,5 \xrightarrow[n \text{ حداکثر}]{n \in \mathbb{Z}} n = 32$$

۳- کمترین تعداد افرادی که حداقل دو نفر از آن‌ها در یک ماه از سال و در یک روز از هفته متولد شده‌اند، چند است؟

جواب: هفته، هفت روز و یک سال دوازده ماه دارد، پس

$$7(12) + 1 = 85$$

۴- اگر $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ و $A \cap B = \{2, 3\}$ و مجموعه $(A - B) \times (B - A)$ دارای ۶ عضو است. تعداد عضوهای مجموعه B چند است؟

جواب:

$$n((A-B) \times (B-A)) = n(A-B) \cdot n(B-A) = n(A - (A \cap B)) \cdot n(B-A) = 3 \cdot n(B-A) = 6$$

$$\rightarrow n(B-A) = 2 \xrightarrow{n(B-A)=n(B)-n(A \cap B)} n(B) = 4$$

۵- اگر A و B دو مجموعه ناتهی باشند و $(A \times B) - (B \times A) = \emptyset$ ، آنگاه $A - B$ چیست؟

جواب:

$$(A \times B) - (B \times A) = \emptyset \rightarrow A = B \rightarrow A - B = \emptyset$$

۶- اگر A مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی و رابطه R زیرمجموعه‌ای از A^2 به صورت $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$ تعریف شده باشد، آیا این رابطه هم‌ارزی است؟ در صورت قبول، دسته هم‌ارزی $(2, 5)$ چند عضو دارد؟

جواب: با توجه به تعریف، این رابطه هم‌ارزی است. ((بررسی شود.))

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c \Leftrightarrow a - b = c - d$$

$$\rightarrow 2 - 5 = c - d \rightarrow c - d = -3 \quad c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\{(1, 4), (2, 5), \dots, (6, 9)\} \rightarrow 6 \text{ عضو دارد.}$$

۷- رابطه $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, |x| + |y| = 2\}$ ، چند عضو زوج مرتب دارد؟

جواب:

$$R = \{(0, 2), (2, 0), (0, -2), (-2, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\} \rightarrow n(R) = 8$$

۸- در یک کلاس چهل نفری ۷ نفر نامزد انتخاب مشاوره به امور مدرسه‌اند. انتخاب‌شونده باید رأی بیشتر از سایرین داشته باشد، حداقل رأی انتخاب‌شونده چند است؟

جواب: اگر بیشترین رأی انتخاب‌شونده ۶ باشد پس بقیه حداکثر ۵ رأی دارند و در این صورت تعداد رأی‌ها به ۴۰ نمی‌رسد ولی در حالت بیشترین رأی ۷، حالت ممکن وجود دارد.

۹- حداقل چند عدد از مجموعه $\{2, 3, 4, \dots, 30\}$ ، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم لااقل دو عدد از آن‌ها مقسوم‌علیه مشترک غیر ۱ دارند؟

جواب: یعنی یک عامل اول مشترک داشته باشند، پس کفایت تمام اعداد اول را در این مجموعه جدا کنیم:

$$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\} \rightarrow n(B) + 1 = 10 + 1 = 11$$

تمرین: رابطه $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a^2 - c^2 = b^2 - d^2$ روی مجموعه $\mathbb{R}^2$ تعریف شده است. در صورت هم‌ارزی بودن، یک عضو در کلاس هم‌ارزی $(3, 5)$ نام ببرید.

فصل ۳۹

نظریه اعداد

۱- در هم‌نهشتی به پیمانه m سه عدد a و ۴۱ و ۱۳۲ در یک کلاس هم‌ارزی قرار دارند، کوچکترین عدد سه رقمی a به طوری که مجموعه $\mathbb{Z}$ به تعداد کمتری کلاس هم‌ارزی افراز شود، چند است؟

جواب:

$$۱۳۲ - ۴۱ = ۹۱ = (۷)(۱۳)$$

پس اعداد ۷ و ۱۳ می‌توانند بجای m قرار گیرند ولی از آنجا که خواسته مسئله تعداد کلاس هم‌ارزی کمتر برای مجموعه اعداد صحیح است پس

$$m = ۷ \xrightarrow{۴۱=(۷)(۵)+۶} ۱۰۰ \leq ۱۰۴ = (۷)(۱۴) + ۶ \rightarrow a = ۱۰۴$$

۲- عدد $۷^{۱۵} + a$ مضرب ۱۷ است. کوچکترین عدد طبیعی a چند است؟

جواب:

$$۷^{۱۵} + a = (۷^۳)^۵ + a = ۳۴۳^۵ + a = (۱۷k + ۳)^۵ + a = ۱۷k' + ۳^۵ + a = ۱۷k' + ۲۴۳ + a$$

$$= ۱۷(k' + ۱۴) + ۵ + a = ۱۷k'' \rightarrow a = ۱۷k + ۱۲ \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{\text{کوچکترین } n} n = ۱۲$$

۳- اگر دو عدد a و ۹۰ نسبت به هم اول باشند، بزرگترین عددی که همواره $a^۴ - ۱$ می‌شمارد، چند است؟

جواب:

$$a^۴ - ۱ = (a^۲ - ۱)(a^۲ + ۱) = (a - ۱)(a + ۱)(a^۲ + ۱)$$

از آنجا که a و ۹۰ نسبت به هم اول هستند پس

$$a = ۴k \pm ۱$$

و این نتیجه میدهد که از بین $a - ۱$ و $a + ۱$ یکی بر دو و دیگری بر چهار بخش پذیر است همچنین $a^۲ + ۱$ حتماً بر دو بخش پذیر است پس $a^۴ - ۱$ حتماً بر ۱۶ بخش پذیر است

با ادامه همین روند برای $a = 5k + r$ و $a = 3k \pm 1$ معلوم می‌شود که $a^4 - 1$ بر $(5)(3)(2)(4)(2)$ بخش پذیر است، یعنی 240 را می‌شمارد.

تمرین: باقیمانده عدد 3^{48} بر 11 چند است؟

۴- اگر $(a^2 - 1, m) = 1$ و $a^3 - a^2 - a + 1 \equiv a^2 - 1 \pmod{m}$ و $m|a - k$ چند است؟

جواب:

$$m|a^3 - a^2 - a + 1 - a^2 - 1 = (a^2 - 1)(a - 2) \rightarrow m|a - 2 \rightarrow k = 2$$

تمرین: دو عدد 24 و 185 در یک دسته هم‌ارزی به پیمانه m همنهشت شده‌اند. اگر $(m, 7) = 1$ ، باقیمانده m^m بر 7 چند است؟

۵- اگر $a^p = 10k + 7$ آنگاه رقم یکان عدد a^{p+4} چند است؟

جواب: طبق فرمول می‌دانیم که یکان اعداد با پایه یکسان به باقیمانده تقسیم توان بر عدد 4 پس رقم یکان عدد a^{p+4} نیز 7 است.

۶- در تقسیم عدد طبیعی a بر 37 باقیمانده‌ی تقسیم از مربع خارج قسمت آن 2 واحد کمتر است، بزرگترین مقدار a چند است؟

جواب:

$$a = 37k + (k^2 - 2) \xrightarrow[k \in \mathbb{N}]{k^2 - 2 < 37} k \leq 6$$

بزرگترین مقدار k برابر 6 است.

$$\rightarrow a = 37(6) + 34 = 256$$

تمرین: در نمایش عدد طبیعی ۶۷ در مبنای ۳ رقم صفر چند مرتبه تکرار شده است؟

۷- باقیمانده‌ی تقسیم عدد $۳^{۴۲} - ۲^{۴۲}$ بر عدد ۳۵ چند است؟

جواب:

$$۳^{۴۲} - ۲^{۴۲} = (۵ - ۲)^{۴۲} - ۲^{۴۲} = ۵k$$

$$۳^{۴۲} - ۲^{۴۲} = (۳^۳)^{۱۴} - (۲^۳)^{۱۴} = (۷(۴) - ۱)^{۱۴} - (۷ + ۱)^{۱۴} = ۷k''$$

$$۳^{۴۲} - ۲^{۴۲} = ۳۵t + ۰$$

۸- به ازای کدام مقدار n مجموع ارقام عدد $۱۰^{۳n} - ۱۰^n$ برابر ۲۱۶ می‌شود؟

جواب:

$$۱۰^{۳n} - ۱۰^n = ۱۰^n(۱۰^{۲n} - ۱) \rightarrow ۹(۲n) = ۲۱۶ \rightarrow n = ۱۲$$

۹- اگر n ، عدد طبیعی و دو عدد $((n + ۴, ۹n - ۵))$ دارای مقسوم علیه مشترک غیر ۱ باشد، تعداد اعداد دورقمی n چند است؟

جواب:

$$(n+۴, ۹n-۵) = d \rightarrow (۹(n+۴), ۹n-۵) = d \rightarrow (۹n-۵+۴۱, ۹n-۵) = d \xrightarrow{d \neq 1} d = ۴۱$$

$$n + ۴ = ۴۱ \rightarrow n = ۳۷ \text{ یا } n + ۴ = ۸۲ \rightarrow n = ۷۸$$

تمرین: اگر عدد $a + ۷^{۲۰۰}$ مضرب ۱۹ باشد، کوچکترین مقدار a چند است؟

تمرین: باقیمانده‌ی تقسیم عدد $(-6)^{23}$ بر عدد ۳۳ چند است؟

۱۰- اگر $(abc)_9 = (cba)_8$ رقم a چند است؟

جواب:

$$49a + 7b + c = 64c + 8b + a \rightarrow 48a - 63c = b \rightarrow 3(16a - 21c) = b \xrightarrow{b=3} 16a - 21c = 1$$

$$a = \frac{21c + 1}{16} = \frac{16c + 5c + 1}{16} \rightarrow a = c + \frac{5c + 1}{16} \xrightarrow{c=3} a = 4$$

برای $b = 0$ و $b = 6$ جواب موجود نیست.

تمرین: در تقسیم عدد ۱۶۵ بر عدد طبیعی b ، خارج قسمت مجذور باقیمانده است، چند عدد b می‌توان یافت؟

ریاضیات پاری

تمرین: نمایش عددی در مبنای ۳ به صورت $(201121)_3$ است در نمایش این عدد در مبنای ۴، چند مرتبه رقم صفر تکرار شده است؟

تمرین: در تقسیم عدد طبیعی a بر عدد طبیعی b باقیمانده ۱۷ و خارج قسمت ۲۵ می‌باشد. اگر a مضرب ۶ باشد، رقم دهگان کوچکترین عدد طبیعی a چند است؟

راهنمایی: دقت کنید: $b > 17$

۱۱- از رابطه همنهشتی (پیمانه ۸۴) $۳۶a \equiv ۱۹۲$ ، باقیمانده a بر ۷ چند است؟

جواب:

$$۳۶a - ۱۹۲ = ۸۴k \rightarrow ۳a - ۱۶ = ۷k \rightarrow ۳a = ۷k + ۱۶ \rightarrow a = ۷k' + ۳$$

۱۲- عدد شش رقمی $\overline{ababab}$ بر چه اعداد اولی حتماً بخشپذیر است؟

جواب:

$$\overline{ababab} = \overline{ab} \times ۱۰۱۰۱ = \overline{ab} \times (۳ \times ۷ \times ۱۳ \times ۳۷)$$

۱۳- به ازای چند عدد طبیعی n ، دو عدد به صورت‌های $۱۱n + ۴$ و $۲۵n + ۹$ نسبت به هم اول نیستند؟

$$(۱۱n + ۴, ۲۵n + ۹) = d \rightarrow ۱۱n + ۴ = dk, ۲۵n + ۹ = dk'$$

$$\rightarrow d(۲۵k - ۱۱k') = ۲۵(۱۱n + ۴) - ۱۱(۲۵n + ۹) = ۱ \rightarrow d = ۱$$

پس همیشه نسبت به یکدیگر اول هستند.

۱۴- مجموع ارقام کوچکترین عدد طبیعی سه رقمی x که در معادله $۵۷x - ۸۷y = ۳۴۲$ صدق کند، چند است؟

جواب:

$$۵۷x - ۸۷y = ۳۴۲ \rightarrow ۱۹x - ۲۹y = ۱۱۴ \rightarrow ۱۹x = ۲۹y + ۱۱۴ = ۲۹y + (۱۹ \times ۶)$$

$$\rightarrow y = ۱۹k \rightarrow x = ۲۹k + ۶ \xrightarrow{x \geq ۱۰۰} k \geq ۴ \xrightarrow{\min k} x = ۲۹(۴) + ۶ = ۱۲۲ \rightarrow ۱ + ۲ + ۲ = ۵$$

فصل ۴۰

آمار



فصل ۴۱

سوالات اضافه شده در