



فهرست مطالب

۴	۱	مبانی ریاضیات
۴	۱.۱	منطق ریاضی
۶	۲.۱	مجموعه
۱۱	۱.۲.۱	احتمال
۱۸	۲	اتحاد، معادله و نامعادله
۱۸	۱.۲	معادله
۱۹	۲.۲	اتحاد
۲۳	۳.۲	معادلات درجه دوم
۲۷	۴.۲	نامعادله
۳۱	۳	توان‌های گویا و عبارت‌های جبری
۳۱	۱.۳	توان‌های گویا
۳۹	۴	تابع ((۱))
۳۹	۱.۴	رابطه
۴۹	۲.۴	رسم نمودار یک تابع
۵۰	۳.۴	تساوی دو تابع
۵۱	۵	دایره
۵۲	۶	مثلثات (۱)
۵۷	۱.۶	معادله مثلثاتی
۵۷	۲.۶	رسم نمودار توابع مثلثاتی
۶۰	۷	روابط طولی در مثلث‌ها
۶۱	۱.۷	قانون کسینوس‌ها
۶۱	۲.۷	قانون سینوس‌ها
۶۱	۳.۷	فرمول هرون
۶۲	۴.۷	قضیه تالس
۶۵	۸	احتمال
۷۵	۱.۸	احتمال‌های شرطی و قانون بیز و قانون احتمال کل:
۷۵	۲.۸	مثال‌هایی از قانون بیز و قانون احتمال کل:
۸۰	۹	دنباله

۹۰	۱۰ تابع ((۲))
۹۹	۱۱ توابع نمایی و لگاریتم
۱۰۸	۱۲ مثلثات ((۲))
۱۰۸	۱.۱۲ مرور
۱۰۹	۲.۱۲ تابع زوج
۱۰۹	۳.۱۲ تابع فرد
۱۰۹	۴.۱۲ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا
۱۱۲	۵.۱۲ اثبات‌ها
۱۱۷	۱۳ مفهوم حد
۱۲۲	۱۴ هندسه تحلیلی مقدماتی
۱۲۶	۱۵ مفهوم مشتق
۱۳۰	۱۶ محاسبه مشتق
۱۳۱	۱۷ کاربرد مشتق
۱۴۰	۱۸ دایره، بیضی و سهموی
۱۵۲	۱۹ بردارها
۱۵۳	۲۰ ماتریس‌ها

فصل ۱

مبانی ریاضیات

۱.۱ منطق ریاضی

گزاره: به یک عبارت خبری که دقیقاً درست یا نادرست باشد گرچه درستی یا نادرستی آن بر ما معلوم نباشد.

یک گزاره ساده در ریاضیات غالباً با حروف کوچک انگلیسی مانند: p ، q ، r و... نمایش داده می‌شود.
گزاره‌های مرکب:

فصلی:

عطفی:

شرطی:

نقیض گزاره p را با نماد $\neg p$ نمایش می‌دهیم و یعنی:

جدول ارزش:

*)) گزاره $p \vee q$ تنها در حالتی نادرست است که

، گزاره $p \wedge q$ تنها در حالتی درست است که

و گزاره $p \implies q$ تنها در حالتی نادرست است که

روابط میان گزاره‌ها:

$$۱) p \wedge \sim p \equiv \quad \text{و} \quad p \vee \sim p \equiv \quad \text{و} \quad \sim(\sim p) \equiv$$

$$۲) \sim(p \wedge q) \equiv \quad \text{و} \quad \sim(p \vee q) \equiv$$

$$۳) p \equiv \quad \equiv$$

$$۴) (p \implies q) \equiv \quad \equiv$$

$$۵) (p \Leftrightarrow q) \equiv \quad \equiv$$

انتفای مقدم:

برهان خلف:

۲.۱ مجموعه

مجموعه:

مجموعه تهی:

تذکر:

$A = \{a, b, c\}$ فرض کنید A^*

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} =$$

$$C = \{3x+2 | x \in \mathbb{N}, x \leq 3\} =$$

$$D = \{x+y | x \in \mathbb{N}, x < 3, y \in \mathbb{Z}, 0 \leq y < 3\} =$$

شمارش اعضای یک مجموعه:

$$\{1, 2, 1+1, \frac{2^{100}}{2^{99}}\}$$

$$\{\{\}, \emptyset, 3, \sqrt{9}, \{\{\}\}, \{\{\}, 1\}, \{\emptyset\}\}$$

$$\{\{2, 3\}, \{3, 2\}, \{\{\}\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, \{3\}\}\}$$

نمایش یک مجموعه:

زیرمجموعه:

اشتراک، اجتماع و تفاضل دو مجموعه و خاصیت‌های جابجایی و شرکت‌پذیری:

$$A \cap B = \{ \quad \quad \quad \} = \{ \quad \quad \quad \} =$$

$$A \cup B = \{ \quad \quad \quad \} = \{ \quad \quad \quad \} =$$

$$A - B = \{ \quad \quad \quad \} \rightarrow$$

نمودار ون:

خاصیت پخشی برای مجموعه‌ها و گزاره‌ها:

$$A \cap (B \cup C) =$$

$$A \cup (B \cap C) =$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv$$

مجموعه مرجع و نمودار ون:

$$A \cap U = \quad , \quad A \cup U =$$

مجموعه متمم، روابط آن و قوانین دمورگان:

$$A' =$$

$$\emptyset' = \quad , \quad U' =$$

$$A \cap A' = \quad , \quad A \cup A' =$$

$$A - B =$$

$$(A \cap B)' =$$

$$(A \cup B)' =$$

مجموعه‌های اعداد:

$$\mathbb{R} =$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}.$$

$$\mathbb{W} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}.$$

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}.$$

$$\subseteq \subseteq \subseteq \subseteq .$$

$$\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = , \quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' =$$

مجموعه متناهی: مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن را بتوان با یک عدد مجموعه نامتناهی:

*) (تمام مجموعه‌های

*) (اگر A نامتناهی و $A \subseteq B$ ، آنگاه:

اگر A متناهی و $B \subseteq A$ ، آنگاه:

بازه:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a \text{ and } x \leq b\}.$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a \text{ and } x < b\}.$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : x > a \text{ and } x \leq b\}.$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : x > a \text{ and } x < b\}.$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}.$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}.$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}.$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}.$$

اشتراک و اجتماع بازه‌ها:

مجموعه توانی:

$$\mathcal{P}(A) = \{B \in U : B \subseteq A\}$$

$$C = \{1, 2, 3\} \implies \mathcal{P}(C) =$$

مجموع اعداد گنگ و گویا و حاصلضرب آنها:

- مجموع دو عدد گویا
- مجموع دو عدد گنگ
- مجموع یک عدد گنگ و یک عدد گویا
- حاصلضرب دو عدد گویا
- حاصلضرب دو عدد گنگ
- حاصلضرب یک عدد گنگ و یک عدد گویای ناصفر

نکته:

۱.۲.۱ احتمال

• مجموعه تمام حالت‌های ممکن

• مجموعه پیشامد(های) مدنظر

• اشتراک دو پیشامد

• اجتماع دو پیشامد

• عدم وقوع پیشامد

• وقوع یک پیشامد و عدم وقوع دیگری



روابط مهم احتمال:



تست: دو تاس همگن را انداخته‌ایم. اگر حاصل جمع عددهای روشده کمتر از ۶ باشد. احتمال آنکه شماره یکی از تاسهای روشده برابر ۲ باشد، کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

- (۱) $\frac{1}{3}$
(۲) $\frac{2}{5}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) $\frac{3}{5}$

جدول مجموع دو تاس:

تست: اگر $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$ و $A_i = [-i, \frac{9-i}{2}]$. $A_i = (A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$ به کدام صورت است؟ (ریاضی ۹۲)

(۱) $[-2, -1) \cup (1, 2]$

(۲) $[-2, -1] \cup [1, 2]$

(۳) $[-1, 1]$

(۴) $\emptyset$

تست: دو تاس را با هم می‌اندازیم. با کدام احتمال مجموع اعداد روشده یک عدد اول است؟ (ریاضی ۹۳)

- (۱) $\frac{5}{12}$
(۲) $\frac{4}{9}$
(۳) $\frac{5}{9}$
(۴) $\frac{7}{12}$

تست تمرینی: اگر $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$ و $A_i = [-2i, \frac{7-i}{2}]$ و $(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$

به کدام صورت است؟
 $(1) (0, 1) \cup [-4, -2]$

$(2) [1, 2] \cup [-4, -2]$

$(3) [-4, 1]$

(4) هیچکدام

تست: دو تاس را با هم می‌اندازیم. با کدام احتمال مجموع اعداد رو شده یک عدد مرکب است؟

$(1) \frac{5}{12}$

$(2) \frac{4}{9}$

$(3) \frac{5}{9}$

$(4) \frac{7}{12}$

تست: از بین اعداد متوالی $\{51, 52, \dots, 299, 300\}$ عددی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد فقط بر ۶ یا فقط بر ۷ بخش پذیر است؟ (ریاضی ۹۵)

$(1) 0,24$

$(2) 0,26$

$(3) 0,28$

$(4) 0,31$

تست: مجموعه‌های $A = \{2\}$ ، $B = \{3, 5, \{2\}\}$ و $C = \{\{\{2\}, 3, 5\}, 2\}$ مفروض‌اند. کدام بیان در مورد آنها نادرست است؟ (ریاضی ۹۵)

$(1) A \in B$

$(2) A \in C$

$(3) B \in C$

$(4) A \subseteq C$

تست: دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه رو یا تاس ۶ ظاهر می‌شود؟ (ریاضی ۹۶)

- (۱) $\frac{3}{8}$
- (۲) $\frac{5}{8}$
- (۳) $\frac{5}{12}$
- (۴) $\frac{7}{12}$

تست تمرینی: دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه رو و تاس ۶ ظاهر می‌شود؟

- (۱) $\frac{1}{8}$
- (۲) $\frac{1}{9}$
- (۳) $\frac{1}{12}$
- (۴) $\frac{1}{24}$

تست: ارزش گزاره $(q \vee r) \Rightarrow p$ ، درست است. احتمال اینکه ارزش گزاره r نادرست باشد، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

- (۱) $\frac{3}{7}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{4}{7}$
- (۴) $\frac{2}{3}$

راه حل تشریحی:

تست تمرینی: اگر $q \Rightarrow (p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n)$ درست باشد. احتمال آنکه $(p_1 \vee p_2)$ نادرست باشد کدام است؟ ($n \geq 3$)

$$\frac{2^{n-2} - 1}{2^n - 1} \text{ (۴)} \quad \frac{2^{n-2} + 1}{2^n + 1} \text{ (۳)} \quad \frac{2^{n-2}}{2^n - 1} \text{ (۲)} \quad \frac{2^{n-2}}{2^n + 1} \text{ (۱)}$$

تست تمرینی: اگر $q \Rightarrow (p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n)$ درست باشد. احتمال آنکه $(p_1 \vee p_2)$ درست باشد کدام است؟ ($n \geq 3$)

$$\text{هیچکدام (۴)} \quad \frac{2^{n-2} + 1}{2^n + 1} \text{ (۳)} \quad \frac{3 \times 2^{n-2}}{2^n + 1} \text{ (۲)} \quad \frac{2^{n-2}}{2^n + 1} \text{ (۱)}$$

تست: فرض کنید $U = A \cup B$ مجموعه مرجع و $C = (A - B) \cup (B - A)$. اگر
 $((A' - B)' \cap C)' = B$ کدام عبارت ((حتماً)) درست است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)
 $B \subseteq A$ (۱)

$$A \cap B = \emptyset \quad (۲)$$

$$A \subseteq B \quad (۳)$$

$$A = B \quad (۴)$$

راه حل دوم:



فصل ۲

اتحاد، معادله و نامعادله

۱.۲ معادله

معادله و نامعادله: به یک تساوی که فقط به ازای مقادیری برای مجهولات برقرار باشد، معادله و نابرابری که به ازای مقادیری برای مجهولات برقرار باشد، نامعادله می‌گویند.
*) (یک چند جمله‌ای عبارتست از

$$p(x) =$$

تذکر: از این به بعد منظور ما از چندجمله‌ای،

*) (اگر باشد آنگاه $x = x_0$ را ریشه $p(x)$ یا جواب (یکی از جوابها) معادله $p(x) = 0$ می‌گوییم.)

نکته: منظور از درجه چندجمله‌ای $p(x)$ بزرگترین توان x در $p(x)$ با ضریبی غیرصفر است.

مثال: $p(x) = -x^3 + x - 9$ یک چندجمله‌ای از درجه است.

حل معادله درجه یک:

-
-
-
-

تعریف: گوییم $x = \alpha$ ریشه $p(x)$ است، هرگاه:

نکته: هر چند جمله‌ای از درجه n ،

نکته: ممکن است یک چند جمله‌ای

نکته مهم: هر چند جمله‌ای از درجه

نتیجه:

مثال: آیا معادله $x^{401} + x + 1$ ریشه حقیقی دارد؟

مثال: آیا $x^8 + 1$ ریشه حقیقی دارد؟

مثال: آیا $x^8 - 16$ ریشه حقیقی دارد؟

نکته: اگر $p(\alpha) = 0$ و $p(x)$ یک چند جمله‌ای باشد داریم:

۲.۲ اتحاد

نکته: اگر $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ ریشه‌های حقیقی معادله درجه n -ام، $p(x) = 0$ باشد آنگاه:

و اگر ریشه‌های حقیقی $p(x)$ هیچکدام با یکدیگر برابر نباشند:

نکته مهم:

نکته: تعداد ریشه‌های حقیقی یک چندجمله‌ای از درجه n همواره

رابطه ویت(ویتا):

مثال: یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح پیدا کنید که دو ریشه آن $1 - \sqrt{2}$ و $1 + \sqrt{6}$ باشند.

یادآوری اتحادها:

$$(a+b)^2 =$$

$$(a+b)(a-b) =$$

$$(a+b+c)^2 =$$

$$(x+a)(x+b) =$$

$$(x-\alpha)(x-\beta) =$$

$$(a+b)^3 =$$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) =$$

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1}) =$$

$$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\dots-ab^{n-2}+b^{n-1}) =$$

نکته:

$$(a+b)^n =$$

سه تذکر مهم:

۱.

۲.

۳.

نکات:

۱.

۲.

۳.

۴.

مثال: چند جمله‌ای‌های $x^5 + 1$ ، $x^6 - 1$ ، $x^4 + 2x^2 + 1$ و $x^{16} - 1$ را تجزیه کنید.

۳.۲ معادلات درجه دوم

نکته: اگر $\alpha \in \mathbb{R}$ دلخواه باشد

تذکر:

نکته: معادلات را می‌توان با استفاده از تغییر متغیر مجاز (یعنی چه؟) حل کرد:

فرض کنید $ax^2 + bx + c = 0$ باشد آنگاه:

نکته: اگر

بنویسیم، می‌گوییم

نکته: اگر یک چندجمله‌ای را بتوانیم بصورت

نتیجه: اگر چندجمله‌ای درجه‌ی دوم $p(x)$ ریشه مضاعف داشته باشد، آنگاه



دو راه اصلی پیدا کردن ریشه معادله درجه دوم:

مثال: ریشه‌های $x^2 + 2x + 1$ و $x^2 + x - 1$ را پیدا کنید.

نکته بسیار مهم و نتایج آن:

مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادله درجه ۲:



تست: اگر مجموع و حاصلضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^4 + 7x^2 - 5 = 0$ به ترتیب P و S بنامیم. حاصل عبارت $2P^2 - 3SP + 2S$ ، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

۵۹ - ۷√۶۹ (۱)

۷ + √۶۹ (۲)

۵۰ (۳)

۵۹ + ۷√۶۹ (۴)

تذکر:

تست: اگر عبارت $(a - 1)x^2 + (a - 1)x + 1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد. a متعلق به کدام مجموعه است؟ (ریاضی ۹۱)
 $\{a \mid 1 < a < 5\}$ (۱)

$\{a \mid a < 1\}$ (۲)

$\emptyset$ (۳)

$\mathbb{R}$ (۴)

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a - 3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه اول مختصات نمی‌گذرد؟ (ریاضی ۹۲)

$a \leq 2$ (۱)

$0 < a \leq 2$ (۲)

$2 < a < 3$ (۳)

$0 < a < 3$ (۴)

نکته مهم:

۴.۲ نامعادله

تعیین علامت:

نکته:

نکته:

تذکر:



$$(x+1)(x-1) > 0$$

$$x^3 + 1 > 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 + 3x + 2) \leq 0$$

$$(x^2 + x - 1)(x - 2) > 0$$

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > 0$$

$$(2x + 1)(x^2 - 2x + 1) > 0$$

$$\frac{(x+5)(x-3)}{x-4} > x-3$$

نکته:

نکته:

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} > x-2$$

نکته:

نکته:

تذکر:

نکته:

نکته:



تست اصلاح شده: فرض کنید جواب نامعادله $\frac{((m^2 - 1)x^2 - 4mx + 4)(x - 3\sqrt{x} + 2)}{2x - 3} \geq 0$

به ازای $x > \frac{3}{2}$ برابر $[2, 4]$ باشد، مقدار m کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

۱) ۲-

۲) ۰

۳) ۱

۴) ۲

فصل ۳

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

۱.۳ توان‌های گویا

توان صحیح:

$$a^n = a \times a \times \dots \times a \times a \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

رادیکال:

*) برای هر عدد بزرگتر از صفر، مانند: a دقیقاً دو عدد حقیقی متمایز وجود دارد بطوریکه

*) به همین ترتیب برابر است با عدد حقیقی نامنفی

حال به ازای هر $m \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم:

$$b^{\frac{1}{m-1}} = a \implies \sqrt[m-1]{a} =$$

و در نهایت:

$$(n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}) \quad a^{\frac{m}{n}} =$$

نکته:

روابط میان توان‌های صحیح و پایه‌ها و حاصلضرب اعداد تواندار:

$$a^m a^n = , \frac{a^m}{a^n} = , a^{\frac{1}{n}} =$$

$$(a^m)^n = , a^{\frac{m}{n}} =$$

$$(ab)^n = , \left(\frac{a}{b}\right)^n =$$

$$\sqrt[n]{ab} = , \sqrt[n]{\frac{a}{b}} =$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} =$$

چند مثال:

))*

چند مثال:



اگر $r, s \in \mathbb{Q}$ و $a, b > 0$:

$$a^r a^s =$$

$$(a^r)^s =$$

$$(ab)^r =$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r =$$

$$\frac{a^r}{a^s} =$$

$$a^{-r} =$$

نکته:



قضیه اساسی حساب (یکتایی تجزیه به اعداد اول): هر عدد طبیعی بزرگتر از یک

نتیجه:

مثال:

نتیجه:

مثال:

حدس فرما (قضیه وایلز):

مثال: اگر $61^n = 11^n + 5^n$ ، چند جواب طبیعی برای n دارد؟

اعداد فیثاغورسی:

مثال: نشان دهید به ازای هر $m, n \in \mathbb{N}$ و $m > n$ ، $m^2 + n^2$ ، $2mn$ و $m^2 - n^2$ اعداد فیثاغورسی هستند.

نکته:



مقایسه اعداد تواندار و رادیکالی:

بدست آوردن باقیمانده تقسیم اعداد تواندار بر یک عدد:

بدست آوردن رقم یکان اعداد تواندار:

نکته:

روابطی دیگر از رادیکالها:



گویا کردن مخرج کسرها:

$$\frac{a}{\sqrt{u}} =$$

$$\frac{a}{\sqrt{x} \pm \sqrt{y}} =$$

$$\frac{a}{\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{y}} =$$

یادآوری:

تست: حاصل عبارت $\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{5}$

(۲) $\sqrt{7}$

(۳) $1 + \sqrt{5}$

(۴) $\sqrt{6}$



فصل ۴

تابع ((۱))

۱.۴ رابطه

ضرب دکارتی:

$$A \times B =$$

تعریف کوراتوسکی:

$$(x, y) =$$

تساوی دو زوج مرتب:

تعریف رابطه:

راه‌های نمایش یک رابطه:
(۱) توصیف رابطه:

(۲) با زوج‌های مرتب:

(۳) نمودار پیکانی یا جدول:

(۴) نمودار:

(۵) با ضابطه:

تابع چیست؟

مثال: کدام تابع است؟

$$g = \{(1, 2), (2, 2)\} \text{ یا } f = \{(1, 2), (1, 3)\}.$$

نکته: نمودار یک رابطه تابع است اگر و تنها اگر

مثال: کدام نمودار یک تابع است؟

مثال: x و y را طوری تعیین کنید که $f = \{(1, 3), (2, 4), (1, 3x + y), (2, 4x + y)\}$ یک تابع باشد؟

استفاده از ضابطه برای نمایش یک تابع:

تابع چندضابطه‌ای:

دامنه یک تابع:

مثال: دامنه تابع $f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5)\}$ چیست؟

مثال: دامنه توابع زیر را پیدا کنید.
الف) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 6)\}$
ب) $f(x) = x^2$
نکته:

ج) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
نکته:

د) $f(x) = \sqrt{x + 1}$
نکته:

نکته: اگر بنویسیم $f : A \rightarrow B$ منظور آن است که

نکته: اگر f یک تابع باشد

تعاریف مجموع، حاصلضرب و تقسیم دو تابع:

$$f+g =$$

$$f.g =$$

$$\frac{f}{g} =$$

برد یک تابع:

مثال: برد توابع زیر را به دست آورید.
الف) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 6)\}$

ب) $f(x) = x^2$
نکته:

ج) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
نکته:

د) $f(x) = \sqrt{x+1}$

نکته: هر تابع بصورت $f(x) = ax^2 + bx + c$

نکته: اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی و درجه فرد باشد

نکته:

تابع پوشا: $f : A \rightarrow B$ را پوشا گوییم هرگاه

تابع یک به یک: تابع f را یک به یک گوییم هرگاه

نکته: فرض کنید $f : X \rightarrow Y$ و $f(X) = Y$ داریم:

$$f^{-1}(y_0) =$$

$$f^{-1}(Y) =$$

$$f^{-1} =$$

نکته:

مثال: کدام یک از توابع زیر پوشا، کدام یک به یک و کدام هم پوشا و هم یک به یک است؟
(الف)

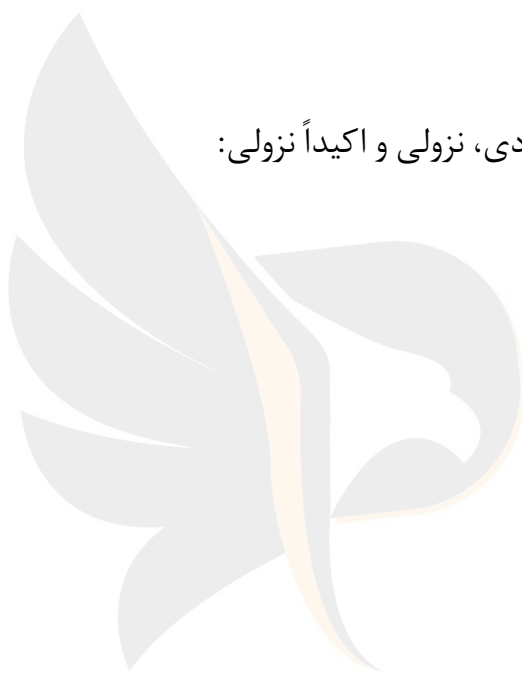
(ب)

(ج)

دامنه تابع زیر و وارون آن را بدست آورید.

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (ac \neq 0)$$

تابع صعودی، اکیداً صعودی، نزولی و اکیداً نزولی:



نکته: اگر f یک تابع صعودی باشد و $c \in \mathbb{R}$

رسم نمودار توابع انتقال یافته:



برای رسم نمودار $f(cx)$ هنگامی که $c < 0$ باشد ابتدا

نکته: برای رسم نمودار $f(ax + b) + c$ از روی نمودار $f(x)$ مرحله به مرحله عمل می‌کنیم:

(۱)

(۲)

(۳)

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = (x + 1)^2 + 1$$

$$f(x) = \sqrt{x + 1}$$

$$f(x) = x^3 - 1$$

رسم نمودار توابع به شکل $f(x) = ax^2 + bx + c$:



تست: تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x - 3$ با دامنه $\{x : |x - 1| < 2\}$ همواره چگونه است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) منفی

۲) مثبت

۳) صعودی

۴) نزولی

تست: شکل روبرو نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $\sqrt{x}f(x)$ ، کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

۲) $[-3, 2]$

۳) $[-4, -3] \cup [1, 2]$

۴) $[-3, 0] \cup [1, 2]$

تمرین: در تست بالا دامنه تابع $\sqrt{x^2 f(x)}$ ، کدام است؟

تست: نمودار تابع $y = |2x - 6| - |x + 4| + x$ در یک بازه اکیداً نزولی است. ضابطه وارون آن در این بازه کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

۱) $-x + 6$; $x < -4$

۲) $-x + 5$; $x > 2$

۳) $-\frac{1}{2}x + 1$; $-4 < x < 3$

۴) $-\frac{1}{2}x + 1$; $-4 < x < 10$

۲.۴ رسم نمودار یک تابع



۳.۴ تساوی دو تابع

دو تابع f و g را برابر گوییم هرگاه

نکته:

تست: اگر دو تابع $f(x) = \frac{3x + a}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$ و $g(x) = \frac{dx + e}{x^3 + bx^2 + 8x + c}$ با هم برابر باشند، $a + b + c + d + e$ کدام است؟

۱- ۱۰

۲- ۱۲

۳- ۱۵

۴- ۱۸

فصل ۵

دایره



فصل ۶

مثلثات (۱)

دو مثلث قائم الزاویه در نظر بگیرید:



اگر تمام زاویه‌های این دو مثلث با هم برابر باشند:

پس:

$$\sin \theta =$$

$$\cos \theta =$$

بطور کلی داریم:

برای محاسبه توابع مثلثاتی از

مراحل بدست آوردن مقدار یک تابع مثلثاتی:

(۱)

(۲)

(۳)

(۴)



$$\tan \theta =$$

$$\cot \theta =$$

$$\csc \theta =$$

$$\sec \theta =$$

*))توابع بالا

*)) اگر در دایره مثلثاتی



رابطه طلایی:



*)) تمامی روابط بالا،

*)) دقت کنید

*)) به ازای هر θ ،

))*

))*

))*



۱.۶ معادله مثلثاتی

۲.۶ رسم نمودار توابع مثلثاتی



تست: اگر $\tan \theta = ۰,۲$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(۳\pi + \theta)}$ کدام است؟
(ریاضی ۹۱)

۱) $۲ -$ ۲) $۰,۱$ ۳) ۲ ۴) ۳



تمرین: اگر $\tan \theta = ۰,۳$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\pi + \theta) - \cos(۳\pi + \theta)}{\sin(۳\pi - \theta) - \sin(۵\pi + \theta)}$ کدام است؟
تست: اگر $\frac{۴}{۳} = \cos^۲ x + \sin^۲ x$ ، $\tan^۲ x$ کدام است؟ ((تجربی ۱۴۰۱))

۱) $\frac{۳}{۲}$

۱) $\frac{۲}{۳}$

۱) $\frac{۱}{۲}$

۱) $\frac{۱}{۴}$

تمرین: اگر $\frac{3}{2} = \cos^2 x + \sin^2 x$ ، $\tan^2 x$ کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۱)

$\frac{2}{3}$ (۱)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۱ (۱)



فصل ۷

روابط طولی در مثلث‌ها



۱.۷ قانون كسينوس ها

۲.۷ قانون سينوس ها



۳.۷ فرمول هرون

۴.۷ قضیه تالس

تست: در شکل مقابل $\hat{A} = 58^\circ$ ، $BM = BD$ و $CN = CD$. زوایه‌ی $\hat{MDN}$ چند درجه است؟ ((ریاضی ۹۱))

۵۸ (۱) ۵۹ (۲) ۶۱ (۳) ۶۲ (۴)

تست: قطر کوچک یک شش ضلعی منتظم، ضلع یک شش ضلعی منتظم جدید است. مساحت شش ضلعی منتظم جدید چند برابر مساحت شش ضلعی اولیه است؟ ((ریاضی ۹۱))

$$(۱) \sqrt{۳} \quad (۲) ۲ \quad (۳) ۳ \quad (۴) ۴$$

تست: در شکل مقابل دو زاویه $\hat{A}$ و $\hat{B}$ قائمه هستند. مقدار x چقدر است؟ ((ریاضی ۹۱))

$$(۱) \frac{\sqrt{۳}}{۲} \quad (۲) \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} \quad (۳) \frac{۴}{۳} \quad (۴) \frac{۳}{۴}$$

یادآوری:

تست: حجم بزرگترین مکعب درون یک کره چه نسبتی از حجم آن کره است؟ ((ریاضی ۹۱))

$$(۱) \frac{\sqrt{۳}}{۲\pi} \quad (۲) \frac{۲\sqrt{۲}}{۳\pi} \quad (۳) \frac{۳\sqrt{۲}}{۴\pi} \quad (۴) \frac{۲\sqrt{۳}}{۳\pi}$$

تست: مساحت هشت ضلعی منتظم محاط بر دایره‌ای به شعاع دو واحد، کدام است؟ ((ریاضی ۹۶))

$$۴(۲ + \sqrt{۲})(۴ \quad ۴(۱ + \sqrt{۲})(۳ \quad ۸(\sqrt{۲} - ۱)(۲ \quad ۸\sqrt{۲}(۱$$

تست: در مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ۴ واحد، از هر دو رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر اسن مستطیل رسم شده است. مساحت متوازی الاضلاع حاصل کدام است؟ ((ریاضی ۹۶))

$$۵.۷(۴ \quad ۶(۳ \quad ۷۵.۵(۲ \quad ۲۵.۵(۱$$

تست: در شکل زیر EF موازی BC است. مقدار $y - ۲x$ ، کدام است؟ ((تجربی ۱۴۰۰))

$$۴(۴ \quad ۲(۳ \quad -۲(۲ \quad -۴(۱$$

فصل ۸

احتمال

اصل اساسی شمارش (اصل ضرب):



تعمیم اصل اساسی شمارش (اصل ضرب):

مثال:

تعداد جایگشت‌های ممکن یعنی



اصل جمع:

تعميم اصل جمع:

مثال:



* ((برای یک مجموعه n عضوی تعداد جایگشت‌ها برابر است.))

* ((تعداد جایگشت‌های n شیئی که n_1 تا از آن‌ها مثل هم، و n_r تای آن‌ها مثل هم هستند برابر است با

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

مثال: در یک مسابقه از ۱۵ بازیکن، ۴ نفر روسی، ۳ نفر آمریکایی، ۲ نفر انگلیسی و یک نفر برزیلی هستند. اگر نتیجه مسابقه تنها ملیت بازیکنی را که برنده شده است، اعلام کند. چند نتیجه ممکن وجود دارد؟



مثال: از یک گروه متشکل از ۵ زن و ۷ مرد، چند شورای مختلف ۵ عضوی شامل ۲ زن و ۳ مرد می‌توان انتخاب کرد؟ اگر دو نفر از مردها با یکدیگر خصومت داشته باشند و نخواهند با هم در شورا باشند، چند شورا می‌توان انتخاب نمود؟

مثال: مجموعه‌ای از n آنتن داریم که m تای آن‌ها معیوب و بقیه اسلم است. اگر آنتن‌های سالم و معیوب قابل تشخیص باشند. چند ترتیب متفاوت از آن‌ها وجود دارد به طوری که هیچ دو آنتن معیوب بطور متوالی قرار نگیرند؟

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n$$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی:

اگر $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} =$$

مثال: ۱۰ ورزشکار را باید به دو تیم A و B هر کدام ۵ عضو تقسیم نمود. تیم A در یک گروه از مسابقات و تیم B در گروه دیگر از مسابقات شرکت می‌کنند. چند تقسیم‌بندی مختلف امکان‌پذیر است؟

مثال: در مثال قبل اگر ورزشکاران به دو تیم ۵ تایی تقسیم می‌شدند، چند تقسیم‌بندی مختلف امکان‌پذیر بود؟

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n = \sum$$

تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$:

تعداد جواب‌های حسابی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$:

چند فرمول:

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \dots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}$$

$$k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1} = n\binom{n-1}{k-1} \quad ((k \leq n))$$

تعداد مسیرها:



تعداد مستطیل‌ها:

اصول احتمال:

فضای نمونه: مجموعه تمام نتایج ممکن یک آزمایش را با نماد S نشان می‌دهیم و داریم:



S را بگونه‌ای انتخاب کنید که $((.$

$((.$

$(($ تمامی

مثال: یک شورای پنج نفره را باید از یک گروه متشکل از ۶ مرد و ۹ زن انتخاب کرد. اگر انتخاب افراد تصادفی باشد، احتمال اینکه شورا متشکل از ۳ مرد و ۲ زن باشد چقدر است؟

مثال: اگر در یک کلاس n دانش‌آموز باشند، احتمال اینکه هیچ دو نفری در یک روز از سال متولد نشده باشند را بدست آورید.

پیشامد متمم:

احتمال برنولی:

پیشامدهای مستقل و پیشامدهای ناسازگار:



احتمال غیرهمشانس:

پاسور الف) احتمال اینکه از پنج ورق به طور تصادفی انتخاب شده همه از یک شکل نباشند و پشت سر هم باشند؟

ب) احتمال اینکه در تقسیم بین چهار نفر یکی از افراد همه ورق های خشت را دریافت کند؟

ج) احتمال اینکه هر یک از چهار نفر ورق تک را دریافت نمایند، چقدر است؟

۱.۸ احتمال‌های شرطی و قانون بیز و قانون احتمال کل:



۲.۸ مثال‌هایی از قانون بیز و قانون احتمال کل:

تست: ۷ کتاب در موضوعات مختلف که ریاضی، فیزیک و زیست نیز جزو آنهاست، در اختیار داریم. به چند طریق می‌توان ۴ کتاب را طوری انتخاب کرد که اگر ریاضی انتخاب شود، زیست نیز انتخاب شود و اگر فیزیک انتخاب شود، زیست انتخاب نشود؟ ((تجربی ۱۴۰۱))

$$۱۰(۱) \quad ۱۱(۲) \quad ۱۵(۳) \quad ۱۶(۴)$$



تست: از ۴ دانش‌آموز سال اول و ۵ دانش‌آموز سال دوم ۶ نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که ۲ نفر از سال اول و ۴ نفر از سال دوم انتخاب شوند، کدام است؟ ((ریاضی ۹۱))

$$۱) \frac{۳}{۱۴} \quad ۲) \frac{۲}{۷} \quad ۳) \frac{۵}{۱۴} \quad ۴) \frac{۳}{۷}$$

تست: زمان تصادفی که حیوان خاصی نسبت به داروی خاص عکس‌العمل نشان دهد بین ۱٫۸ دقیقه تا ۲٫۴۵ دقیقه است. با کدام احتمال عکس‌العمل این حیوان به این دارو کمتر از ۲٫۱۹ دقیقه است؟ ((ریاضی ۹۱))

۰٫۴ (۱) ۰٫۴۵ (۲) ۰٫۵۴ (۳) ۰٫۶ (۴)



تست: در داخل یک شش ضلعی منتظم به ضلع $۲\sqrt{۳}$ واحد، نقطه‌ای به تصادف انتخاب می‌شود. با کدام احتمال فاصله این نقطه از هر ضلع شش ضلعی بیشتر از یک واحد است؟ ((ریاضی ۹۲))

$\frac{۴}{۹}$ (۱) $\frac{۲}{۳}$ (۲) $\frac{۵}{۹}$ (۳) $\frac{۳}{۴}$ (۴)

تست: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند بطوریکه $P(A) = ۰,۶$ ، $P(B) = ۰,۷$ و $P(A \cap B') = ۰,۲$ باشند، آن‌گاه $P(A' \cap B)$ کدام است؟ ((ریاضی ۹۲

- (۱) ۰,۱ (۲) ۰,۳ (۳) ۰,۴ (۴) ۰,۵



تمرین: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند بطوریکه $P(A) = ۰,۶$ ، $P(B) = ۰,۷$ و $P(A \cap B') = ۰,۲$ باشند، آن‌گاه $P(A \cap B)$ کدام است؟
تست: در معادله $ax^2 + bx = ۵$ ضریب a به تصادف عددی در بازه $[۱, ۳]$ و ضریب b عددی در بازه $[۰, -۳]$ انتخاب شده است. با کدام احتمال جواب‌های این معادله، بیشتر از $\frac{۲}{۳}$ است؟ ((ریاضی ۹۳

- (۱) $\frac{۴}{۹}$ (۲) $\frac{۵}{۹}$ (۳) $\frac{۷}{۱۲}$ (۴) $\frac{۵}{۶}$

تست: هر یک از اعداد ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ بر روی شش گوی یکسان نوشته شده است. بطور تصادف متوالی هم یک گوی از جعبه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد فرد یا زوج یک در میان خارج می‌شوند؟ ((ریاضی ۹۴))

۰,۱(۱ ۰,۱۲(۲ ۰,۱۵(۳ ۰,۲(۴

تست: دو عدد به‌طور تصادفی بین ۰ و ۲ انتخاب می‌شوند. با کدام احتمال نسبت این دو عدد بین ۰,۳ و ۰,۵ می‌باشد؟ ((ریاضی ۹۶))

۰,۲(۱ ۰,۲۵(۲ ۰,۳(۳ ۰,۳۵(۴

تست: برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم: $n! = ۲^{a_1} \times ۳^{a_2} \times \dots$. مقدار $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ به ازای $n = ۲۰$ کدام است؟ ((ریاضی ۱۴۰۰))

۲۸(۱ ۳۲(۲ ۳۶(۳ ۴۰(۴

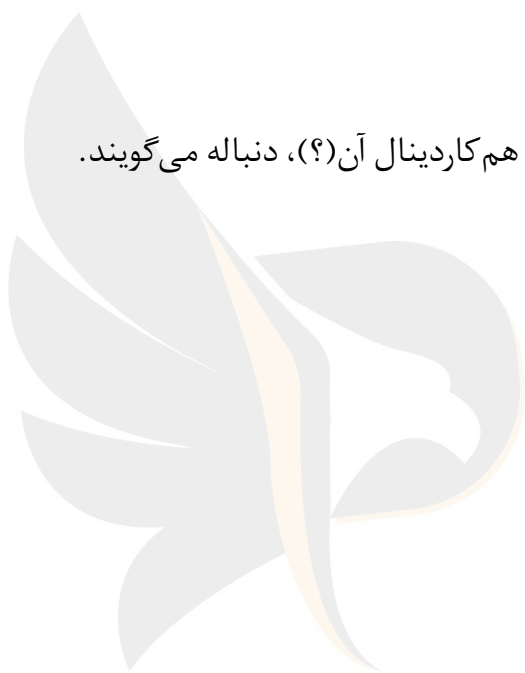
فصل ۹

دنباله

به یک تابع با دامنه $\mathbb{N}$ یا هم کاردینال آن $(?)$ ، دنباله می گویند.

جمله:

پیدا کردن جمله n -ام:



مثال: یک جمله عمومی برای دنباله‌های زیر بنویسید.

$$1, 4, 9, \dots$$

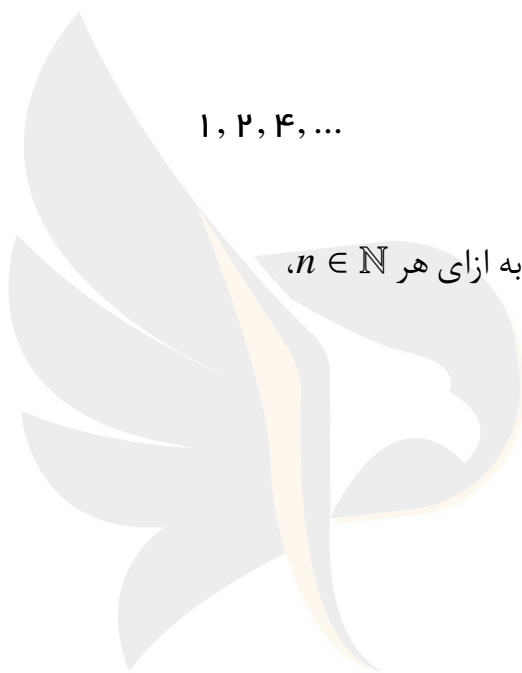
$$2, 4, 6, \dots$$

$$-1, 1, -1, \dots$$

$$1, 2, 4, \dots$$

نکته مهم: جمله عمومی به ازای هر $n \in \mathbb{N}$

دنباله بازگشتی:



دنباله حسابی: اگر در یک دنباله

جمله عمومی دنباله حسابی:



فرمول‌های دنباله حسابی:

فرمول‌های مجموع جملات دنباله حسابی:

نکته: یک دنباله حسابی است اگر و تنها اگر مجموع جمله بعد و جمله قبل هر جمله برابر باشد با دو برابر آن جمله.

نکته: میانگین n جمله از یک دنباله حسابی برابر است با:



میانگین حسابی:

دنباله هندسی: اگر در یک دنباله

جمله عمومی دنباله هندسی:



فرمول مجموع جملات دنباله هندسی:

نکته: یک دنباله هندسی است اگر و تنها اگر حاصلضرب جمله بعد و جمله قبل هر جمله برابر باشد با آن جمله به توان دو ((مجذور آن جمله)).



یادآوری توان و ریشه:

تست: اگر جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنباله حسابی جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند. قدر نسبت دنباله هندسی چند است؟ (تجربی ۹۹)

- ۴
۹
۲
۳
۲
۹
۴
- (۱)
(۲)
(۳)
(۱)

تست: اگر $\frac{3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} + 3^{x+5}}{2^{x-2} + 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3}} = 52$ ، x چند است؟ ((ریاضی ۱۴۰۰))

- ۱(۱)
۲(۲)
۳(۳)
۴(۱)

تست: فرض کنید جمله صدم دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1$ با شرط $a_1 = 1$ برابر $\frac{k}{m}$ باشد. جمله نود و هشتم دنباله، کدام است؟ ((ریاضی ۱۴۰۰))

$$\frac{k-m}{2m-k} (1)$$

$$\frac{k-2m}{k-m} (2)$$

$$\frac{k-m}{k-2m} (3)$$

$$\frac{2m-k}{k-m} (4)$$



تست: حاصل عبارت $\frac{t^{11} + t^{10} + \dots + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$ به ازای $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ، کدام است؟ ((ریاضی ۹۳))

$$2(1)$$

$$3(2)$$

$$4(3)$$

$$5(4)$$

تست: ((یادآوری اتحادها)) اگر $\alpha = \sqrt[4]{3\sqrt{2} - 4}$ و $\beta = \sqrt[4]{3\sqrt{2} + 4}$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$ ، کدام است؟ ((ریاضی ۹۵))

۶(۱)

۸(۲)

۶ $\sqrt{2}$ (۳)

۷ $\sqrt{2}$ (۴)



بدانیم ولی نمی آید:



فصل ۱۰

تابع ((۲))

یادآوری:



نکته: در تابع $f : X \rightarrow Y$,

تشخیص دامنه و برد تابع:
نکته: هر تابع $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ بصورت چندجمله‌ای از درجه فرد باشد،

$$\text{نکته: } f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \frac{5}{x + 2}$$

$$g(x) = \frac{\frac{1}{3}x}{x^2 - 4x + 4}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{5}x^3}{x^3 + 1}$$

نکته مهم: چرا ممکن است: $\frac{g(x)h(x)}{h(x)} \neq g(x)$

نکته مهم در مورد توابع رادیکالی $f(x) = \sqrt[m]{h(x)}$ که $m \in \mathbb{N}$

تابع وارون:



نمودار تبدیل:



تركيب توابع:



تابع جزء صحيح:

تابع قدر مطلق:



تابع همانی، ثابت و علامت:

رسم نمودار توابع $y = \sqrt{ax+b}$ ، $(ax+b)^3$ و $\sqrt[3]{ax+b}$ ؛



تست: دنباله

$$a_n := \begin{cases} 2^k & : n = 3k \\ -2k + 4 & : n = 3k + 1 \\ \left[\frac{n}{k+2}\right] + a & : n = 3k + 2 \end{cases}$$

به ازای عدد حسابی n مفروض است. اگر مجموع ده جمله اول این دنباله ۱۹ باشد، حاصل عبارت $a_2 + a_5 + \dots + a_{29}$ کدام است؟ ((ریاضی ۱۴۰۰))

۲(۱)

۰(۲)

۲(۳)

۱(۴)

تست: فرض کنید برد تابع $f(x) = 2\sqrt[3]{9\cos^2 x - 1} + 2\sqrt[3]{1 - 9\cos^2 x}$ بصورت $[a, b]$ باشد، مقدار $b - a$ کدام است؟ ((ریاضی ۱۴۰۰))

$\frac{9}{4}$ (۱)

$\frac{15}{4}$ (۲)

$\frac{9}{2}$ (۳)

$\frac{21}{4}$ (۴)

تست: به ازای کدام مقدار a نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = ax^2 + 4x$ بر هم مماسند؟ ((ریاضی ۱۳۹۱))

۴(۱)

۳(۲)

۲(۳)

۱(۴)

تست: اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$ باشند، ضابطه $f \circ g$ کدام است؟ ((ریاضی ۱۳۹۲))

$$2x^2 - 3x + 7(2)$$

$$4x^2 - 2x + 13(3)$$

$$4x^2 - 4x + 11(4)$$

تست: تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1$ با دامنه $(1, +\infty)$ مفروض است. نمودارهای f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع هستند؟ ((ریاضی ۱۳۹۲))

$$2(2)$$

$$3(3)$$

۴) غیرمتقاطع

تمرین: اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ ، $g \circ f^{-1}$ را بنویسید.

فصل ۱۱

توابع نمایی و لگاریتم

یادآوری توان صحیح و گویا:



تعریف توان گنگ:

اگر $r, s \in \mathbb{R}$ و $a, b > 0$:

$$a^r a^s =$$

$$(a^r)^s =$$

$$(ab)^r =$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r =$$

$$\frac{a^r}{a^s} =$$

$$a^{-r} =$$

رسم نمودارهای a^x و a^{-x} در حالت $a > 1$:

تابع وارون a^x :

رسم نمودار $\log_a x$ و دامنه و برد آن:



فرمول‌های لگاریتم:

$$\log_a a =$$

$$\log_a a^x =$$

$$a^{\log_a x} =$$

$$\log_a xy =$$

$$\log_a \frac{x}{y} =$$

$$\log_a x^r =$$

$$\log_{a^n} x^m =$$

$$\log_b u =$$

$$(\log_a x)(\log_x b) =$$

$$\log_x y = \text{————}$$

تذکر در مورد فرمول‌های لگاریتم:

نمادگذاری مهم:

$$\log x := \log_{10} x$$

مثال‌ها:

$$\log_7 \sqrt{49} = \quad \log_{49} \sqrt{7} =$$

$$\log_9 \sqrt{3} = \quad \log_{\frac{1}{8}} 64 =$$

$$(\log_{17} 18)(\log_{18} 17) =$$

معادله لگاریتمی:

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$$

کاربردهای لگاریتم:

تست: اگر $3^a = A$ باشد، $\log_3 9A^2$ کدام است؟ ((ریاضی ۹۳))

۳ + ۲a (۱)

۳ + a^۲ (۲)

۲ + ۲a (۳)

۲ + a^۲ (۴)

تست: اگر $f(x) = 1 - (\frac{1}{2})^x$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ ((ریاضی ۹۳))

$[-1, 1]$ (۱)

$(-\infty, 0)$ (۲)

$(-\infty, +\infty)$ (۳)

$(0, +\infty)$ (۴)

تست: تابع $f(x) = \log_3(ax + b)$ فقط برای مقادیر $x \in (-\frac{1}{3}, +\infty)$ بامعنی است. اگر $f(4) = 2$ باشد، آنگاه $f(-\frac{4}{9})$ کدام است؟ ((ریاضی ۹۴))

-۲ (۱)

-۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۱ (۴)

تست: نمودارهای دو تابع $f(x) = 3^{ax+b}$ و $g(x) = (\frac{1}{9})^x$ در نقطه‌ای به طول ۱ - متقاطع هستند. اگر $f(2) = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $f^{-1}(27)$ کدام است؟ ((ریاضی ۹۵))

۳(۱) -

۲(۲) -

۱(۳)

۳(۴)

تست: اگر $f(x) = 3 - 2^x$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{xf^{-1}(x)}$ ، کدام است؟ ((ریاضی ۹۶ با کمی تغییر))

۱) $[0, 2]$

۲) $[0, 3]$

۳) $[2, 3]$

۴) $[1, 3]$

تست: تابع با ضابطه $f(x) = a + \log_p(bx - 4)$ از دو نقطه $(2, 6)$ و $(12, 10)$ می‌گذرد. a کدام است؟ ((ریاضی ۹۶))

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

تست: در ظرفی صد لیتر محلول قرار دارد. هر روز چهار لیتر از محلول برداشته و بجای آن آب خالص اضافه می‌کنیم. پس از چند روز غلظت آن $\frac{1}{3}$ غلظت اولیه می‌شود؟
 $(\log 2 \approx 0.3, \log 3 \approx 0.48)$

۱) ۲۰

۲۴(۲)

۳۰(۳)

۳۲(۴)

تست: نمودار تابع با ضابطه $y = a\left(\frac{1}{3}\right)^x$ در نقطه‌ای به عرض ۴ محور عرض‌ها را قطع می‌کند. مقدار تابع در $x = -۲$ کدام است؟

$\frac{4}{9}$ (۱)

$\frac{9}{4}$ (۲)

۲۷(۳)

۳۶(۴)

تست: اگر

$$\frac{3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} \times 9^{\frac{1}{32}} \times 9^{\frac{1}{64}}}{3^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{8}} \times 4^{\frac{3}{8}}} = 3^A \times 4^B$$

مقدار $A + B$ کدام است؟

$-\frac{13}{32}$ (۱)

$\frac{13}{32}$ (۲)

$\frac{13}{16}$ (۳)

$-\frac{13}{16}$ (۴)

تست: دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\log_4(x^2 - x - 2)}{\sqrt{x^2 - 1} + 1}$ ، کدام است؟ ((تجربی ۱۴۰۰))
 $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ (۱)

$$(-1, 2) \quad (2)$$

$$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \quad (3)$$

$$(-2, 1) \quad (4)$$

تست: اگر تساوی $\log_x y - 2 \log_y x = 1$ برقرار باشد و $x, y > 1$ کدام تساوی درست است؟ ((تجربی ۱۴۰۰))

$$y = x^2 \quad (1)$$

$$y = x^3 \quad (2)$$

$$y = \sqrt{x} \quad (3)$$

$$xy = 2 \quad (4)$$

تمارین از ریاضی ۱۴۰۰:

۱- حاصل عبارت

$$(\log_{21}(3))^2 + \log_{21}(147) \log_{21}(1323) =$$

۲- اگر به ازای اعداد مثبت مخالف یک a, b و c ، $\log_a c + \log_b c = 1$ برقرار باشد، آنگاه $\log_c a \cdot \log_c b$ برابر چه عبارتی است؟

فصل ۱۲

مثلثات ((۲))

۱۰۱۲ مرور



۲۰۱۲ تابع زوج

۳۰۱۲ تابع فرد

۴۰۱۲ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

$$\sin(\alpha + \beta) =$$

$$\cos(\alpha + \beta) =$$

نتیجه:

$$\sin(\alpha - \beta) =$$

$$\cos(\alpha - \beta) =$$

$$\sin(\alpha + \beta) =$$

$$\tan(\alpha + \beta) =$$

$$\cot(\alpha + \beta) =$$

مرور معادله خط:

$$y = mx + h$$

شیب خط و راه‌های بدست آوردن آن:

موازی یا عمود بودن دو خط:



$$\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} = A$$

$$\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} = B$$

پس:

$$\sin A + \sin B =$$

$$\sin A - \sin B =$$

$$\cos A + \cos B =$$

$$\cos A - \cos B =$$

$$\sin A \sin B =$$

$$\cos A \cos B =$$

$$\sin A \cos B =$$

$$\cos 2x =$$

$$\sin 2x =$$

۵.۱۲ اثباتها



جواب کلی معادله مثلثاتی:

دوره تناوب، برد و وارون توابع مثلثاتی:



تست: خلاصه شده کسر $\frac{\sin^2 4x - \sin^2 2x}{\sin 5x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{54}$ برابر کدام است؟ ((ریاضی ۹۱))

$\frac{1}{2}$ (۱)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

۱ (۳)

$\sqrt{2}$ (۴)

تست: جواب کلی معادله مثلثاتی $\sqrt{2} \sin x \cos x = \sin x + \cos x$ کدام است؟ ((ریاضی ۹۲))

$k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۱)

$\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ (۲)

$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ (۳)

$2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴)

تست: جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2 \cos^2 x$ کدام است؟ ((ریاضی ۹۳))

$\frac{k\pi}{2}$ (۱)

$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲)

$k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳)

$k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴)

تمارین:

حاصل عبارت‌های:

$$\cos\left(\pi \sin^{-1} \frac{\sqrt{2}}{3}\right) =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right) =$$

اگر $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد:

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$$

اگر شکل زیر نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ در یک بازه تناوب باشد، b و c را بدست آورید.

تعداد جواب‌های معادله زیر در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$4 \sin 3x \cos 3x = 1$$

تست تمرینی: ساده‌شده کسر $\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$ کدام است؟ ((ریاضی ۱۴۰۰))

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (1)$$

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (2)$$

$$2 \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) (3)$$

$$2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) (4)$$

فصل ۱۳

مفهوم حد

اگر $\mathcal{D}_f$ حوالی $x = a$ را شامل شود، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \implies (x \approx a, x \neq a \implies f(x) \approx L)$$

$$x \neq a, x \approx a \rightarrow \begin{cases} (x \approx a, x > a) \equiv x \rightarrow a^+ \text{ و } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1 \implies (x \approx a, x > a \implies f(x) \approx L_1) \\ (x \approx a, x < a) \equiv x \rightarrow a^- \text{ و } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2 \implies (x \approx a, x < a \implies f(x) \approx L_2) \end{cases}$$

پس اگر حد راست و چپ موجود و برابر L باشند، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

*در اکثر مواقع برای بدست آوردن حد کافیست

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x > 2 \\ 2 + x & x \leq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \implies (x \neq a, x \approx a \implies |f(x)| \nearrow)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty \implies (x > a, x \approx a \implies |f(x)| \nearrow)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \implies (x > a, x \approx a \implies f(x) \nearrow)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \implies (x < a, x \approx a \implies f(x) \searrow)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \implies (x < a, x \approx a \implies f(x) \nearrow)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty \implies$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \implies$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \implies$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \implies$$

$$(x \rightarrow +\infty \implies x \nearrow)$$

$$(x \rightarrow -\infty \implies x \searrow)$$

$$(x \rightarrow \infty \implies |x| \nearrow)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \implies$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \implies$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \implies$$

تعریف همسایگی، همسایگی محذوف، همسایگی راست و چپ:



صورت‌های مبهم:

چند مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p + x}{x + p} =$$

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{x^p + x}{x + p} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p + x}{x + p} =$$

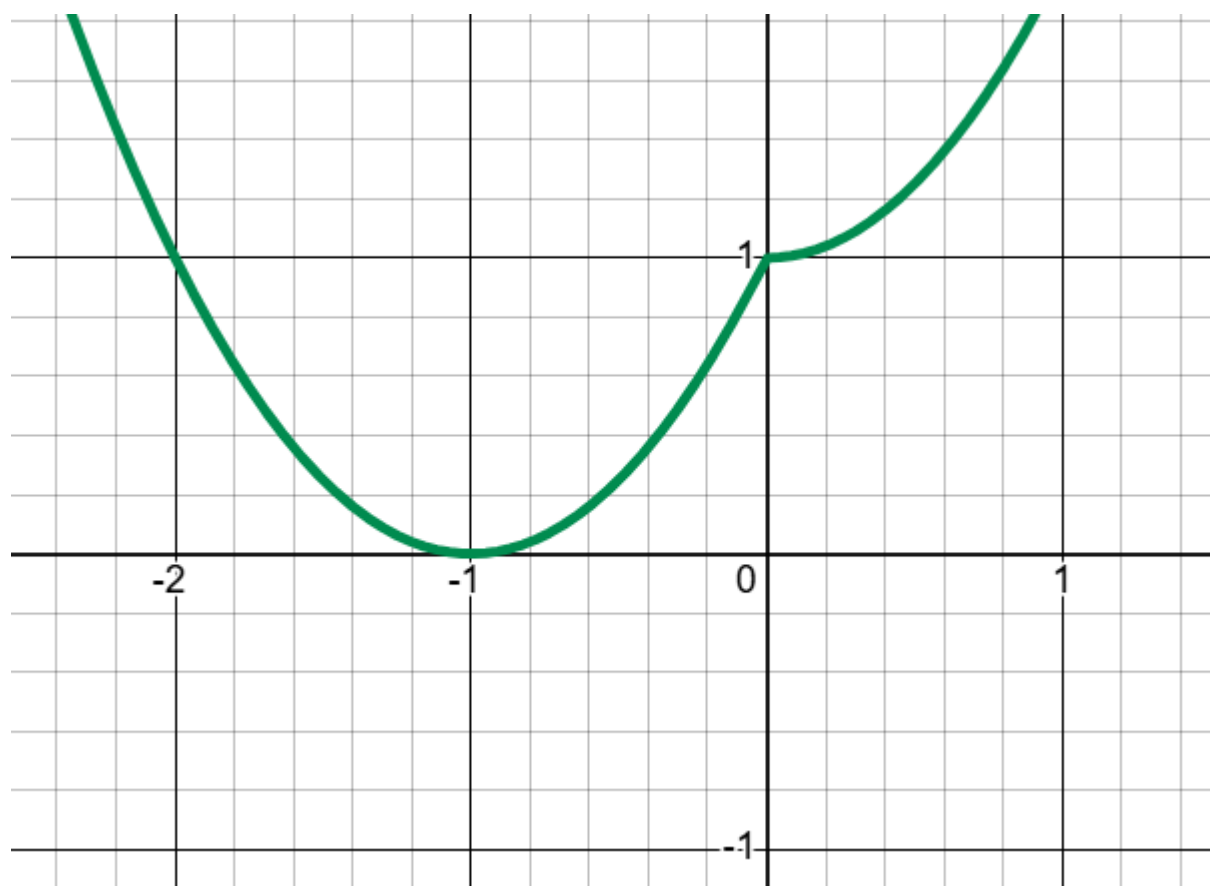
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + p} =$$

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{\sqrt{x} + x}{x + p} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x + p} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^p + x}{x + p} =$$

محاسبه حد از روی نمودار:



فصل ۱۴

هندسه تحلیلی مقدماتی

مختصات دکارتی:

مفهوم رسم نمودار $y = f(x)$:

راستا و یک نقطه از خط $\Leftrightarrow$ دو نقطه از خط راست $\Leftrightarrow$ خط راست

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} =: \text{شیب خط}$$

طبق تعریف شیب خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{معادله خطی گذرا از } (x_1, y_1) \text{ با شیب } m$$

عرض از مبدا و طول از مبدا:

راه‌های مختلف بدست آوردن شیب خط از روی نمودار:

راه‌های مختلف بدست آوردن شیب خط از روی معادله خط:

شرط موازی بودن دو خط:

شرط عمود بودن دو خط:

فرمول فاصله دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) از هم :

فرمول فاصله نقطه (x_1, y_1) از خط $ax + by + c = 0$:

مثال: فاصله مبدا مختصات از خط $x + y + 1 = 5$

راه بدست آوردن فاصله دو خط موازی:

فرمول بدست آوردن نقطه وسط پاره خط دو نقطه A و B :

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

مثال: مختصات نقطه وسط پاره خط به دو سر مبدا مختصات و $(1, 2)$

مثلث

تعاریف: مثلث ABC را فرض کنید،

ارتفاع:

میانه:

نیمساز:

قضیه مهم در مورد نیمسازها:

متوازی الاضلاع



فصل ۱۵

مفهوم مشتق

مفهوم هندسی مشتق



تعریف مشتق

اگر $\mathcal{D}_f$ حوالی $x = a$ را شامل شود، داریم:

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

که در صورت وجود حد بالا گوییم f در $x = a$ مشتقپذیر است و مشتق آن برابر حد بالاست.

مثال‌ها:

$$f(x) = x^p \rightarrow f'(p) =$$

$$f(x) = \sin x \rightarrow f'(\pi) =$$

تابع $f(x) = |x|$ در $x = 0$ مشتقپذیر نیست، چون

تابع $f(x) = \sqrt{|x|}$ در $x = 0$ مشتقپذیر نیست، چون

تابع $f(x) = [x]$ در $x = 0$ مشتقپذیر نیست، چون

رابطه مشتق پذیری و پیوستگی



مشتق برخی از توابع

$$f(x) = c \implies f'(x) = 0 \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$f(x) = x^r \implies f'(x) = rx^{r-1} \quad (r \in \mathbb{R})$$

$$f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \implies f'(x) = -\sin x$$

قواعد مشتق‌گیری

اگر دو تابع f و g در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند، داریم:

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2} \quad (g(a) \neq 0)$$

فصل ۱۶

محاسبه مشتق

قاعده زنجیره‌ای



کاربرد قاعده زنجیره‌ای برای محاسبه مشتق تابع وارون

فصل ۱۷

کاربرد مشتق



۱- دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است. اگر حاصلضرب آنها مینیمم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟

جواب:

$$\begin{aligned} \text{چون مینیمم شده پس باید مشتق برابر صفر شود.} \quad 4x - 6 = 0 \\ \xrightarrow{(2x=y+6 \rightarrow y=2x-6)} xy = x(2x-6) = 2x^2 - 6x \\ \rightarrow x = \frac{3}{2}, y = -3 \rightarrow x + y = \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

۲- برد تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 - 12x + 8$ بر بازه $[-3, 1]$ چیست؟

جواب:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \in (-2, 2) \rightarrow f'(x) < 0 \text{ نزولی است.}$$

$$x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \text{ صعودی است.}$$

پس با در نظر گرفتن رفتار تابع و بازه $[-3, 1]$ داریم:

$$f(-2) = 24 \rightarrow \text{ماکزیمم مطلق}, f(-3) = 17, f(1) = -3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathcal{R}_f = [-3, 24]$$

۳- بیشترین مساحت از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که مجموع یک ضلع زاویه قائمه و وتر آن برابر ۶ باشد، چند است؟

جواب:

$$x^2 + y^2 = (6 - x)^2 \rightarrow y^2 = 36 - 12x$$

حال بجای بدست آوردن بیشترین مقدار $\frac{xy}{2}$ ، بیشترین مقدار $x^2 y^2$ را ابتدا محاسبه می‌کنیم:

$$x^2(36 - 12x) \xrightarrow{\text{مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم.}} 72x - 36x^2 = 36x(2 - x) = 0 \xrightarrow{x > 0} x = 2, y = 2\sqrt{3}$$

$$S_{\max} = \frac{2(2\sqrt{3})}{2} = 2\sqrt{3}$$

تمرین: تعداد نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x) = |\sin x|$ بر بازه $(\frac{-\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ چند است؟

راهنمایی: از تعریف نقاط بحرانی و رسم نمودار $|\sin x|$ استفاده کنید.

۴- طول اکسترمم تابع $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ در فاصله $[0, \pi]$ چند است؟

جواب:

$$f'(x) = \frac{\cos x(2 + \cos x) - \sin x(-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} \xrightarrow[\sin^2 x + \cos^2 x = 1]{f'(x)=0} 2 \cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{-1}{2} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = \frac{2\pi}{3}$$

تمرین: به ازای کدام مقدار k بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$ در بازه $[1, 3]$ قرینه‌ی یکدیگرند؟

۵- ماکسیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5}$ چند است؟

جواب: کافیست $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5$ مینیمم شود، پس:

$$4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \rightarrow x(4x^2 - 12x + 8) = 0 \xrightarrow{x \in \mathbb{R}} x = 0 \text{ یا } x = 1 \text{ یا } x = 2$$

$$f(0) = f(2) = \frac{1}{5} \rightarrow \max\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{5}$$

تمرین: مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = |x - 2| \sqrt[3]{x^2}$ چیست؟

۶- می‌نیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$ روی بازه‌ی $[-1, 3]$ چند است؟

جواب: تابع در این بازه مشتق‌پذیر است پس:

$$f'(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x-2)(x+1) \xrightarrow{f'(x)=0} x = 0 \text{ یا } x = -1 \text{ یا } x = 2$$

پس محل نقاط می‌نیمم و ماکسیمم نسبی این طول‌ها هستند و با تعیین علامت $f''(x)$ داریم:

$$\min\{f(x) : x \in [-1, 3]\} = f(2) = \frac{-8}{3} < f(-1)$$

دقت کنید همیشه باید دو سر بازه را نیز در نظر بگیریم البته در اینجا با توجه به مشتق تابع و خود تابع واضح است که می‌نیمم در $x = 3$ اتفاق نمی‌افتد.

۷- ماکسیمم تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -|x| \cos x$ در بازه‌ی $[-1, 1]$ چند است؟

جواب:

$$\xrightarrow{(-1 \leq x \leq 1) \rightarrow 0 \leq \cos x} (-1 \leq x \leq 1) \rightarrow -|x| \cos x \leq 0, f(0) = 0$$

$$\rightarrow \max f(x) : (-1 \leq x \leq 1) = 0$$

۸- بیشترین مقدار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sin 2x + 2 \cos x$ چند است؟

جواب:

$$f'(x) = 2 \cos 2x - 2 \sin x \xrightarrow{f'(x)=0} 2 \cos 2x = 2 \sin x \rightarrow \cos 2x = \sin x$$

$$\rightarrow 1 - 2 \sin^2 x = \sin x \rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \rightarrow 2(\sin x - \frac{1}{2})(\sin x + 1) = 0$$

$$\rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ یا } \sin x = -1$$

حال با بررسی جواب‌ها، داریم:

$$\max\{\sin 2x + 2 \cos x : x \in \mathbb{R}\} = \sin \frac{\pi}{3} + 2 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

۹- کوتاه‌ترین فاصله مبداء مختصات از نقاط منحنی به معادله $y = \frac{۲}{x^۲}$ چند است؟

جواب: هر نقطه روی این منحنی بصورت $(x, \frac{۲}{x^۲})$ است، پس:

$$\text{فاصله از مبداء مختصات} = \sqrt{x^۲ + \frac{۴}{x^۴}}$$

پس برای بدست آوردن کمترین مقدار این فاصله باید کمترین مقدار $g(x) = x^۲ + \frac{۴}{x^۴}$ را پیدا کنیم، داریم:

$$g'(x) = ۲x - \frac{۱۶}{x^۵} \xrightarrow{g'(x)=0} x = ۸x^{-۵} \rightarrow x^6 = ۸ \rightarrow x = \sqrt{۲}$$

$$\text{کوتاه‌ترین فاصله از مبداء مختصات} = \sqrt{(\sqrt{۲})^۲ + \frac{۴}{(\sqrt{۲})^۴}} = \sqrt{۲ + ۱} = \sqrt{۳}$$

تمرین: می‌نیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = x - \sqrt[۳]{x^۳ - ۳x^۲}$ بر روی $\mathbb{R}$ چند است؟

تمرین: در تابع با ضابطه $f(x) = a \cos 2x + b \sin x$ ، اگر نقطه می نیمم آن $(\frac{\pi}{6}, -3)$ باشد، a چند است؟

۱۰- تابع با ضابطه $f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$ در نقطه $(1, -2)$ دارای اکسترمم نسبی است. عدد a و نوع اکسترمم نسبی چیست؟

جواب:

$$f(1) = -2 \rightarrow a+b = -2, f'(1) = 0 \rightarrow -a+2b = 0 \rightarrow a = \frac{-4}{3}, b = \frac{-2}{3}$$

با توجه به اینکه $f''(1) < 0$ پس این اکسترمم، ماکسیمم نسبی است. ۱۱- به ازای کدام مقدار a تقعر تابع با ضابطه $y = ax^3 + (1-a^2)x^2 + 3x$ در بازه $(-\infty, \frac{1}{a})$ به طرف پایین و در بازه $(\frac{1}{a}, +\infty)$ به طرف بالا است؟

جواب:

$$y' = 3ax^2 + 2(1-a^2)x + 3 \rightarrow y'' = 6ax + 2 - 2a^2 \xrightarrow[x < \frac{1}{a} \rightarrow y'' < 0]{x > \frac{1}{a} \rightarrow y'' > 0} 6a(\frac{1}{a}) + 2 - 2a^2 = 0$$

$$-2a^2 + 3a + 2 = 0 \rightarrow 2(a-2)(a+\frac{1}{2}) = 0 \rightarrow a = 2 \text{ یا } a = -\frac{1}{2}$$

چون باید برای بزرگتر از نیم تقعر رو به بالا باشد پس ضریب x در y'' باید بزرگتر از صفر شود.

$$\rightarrow a = 2.$$

تمرین: تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x^2 + 12}$ در بازه $(-a, a)$ رو به پایین است. بیشترین مقدار a چند است؟

۱۲ - مجموعه طول نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = (x^2 - 28) \cdot \sqrt[3]{x}$ چیست؟

جواب:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \sqrt[3]{x^2} - \frac{28}{3 \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}} (x^2 - 4)$$

در نقاط بحرانی یا مشتق وجود ندارد و یا برابر صفر است.

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

$\rightarrow \{-2, 0, 2\}$

۱۳ - اگر T دوره تناوب اصلی تابع با ضابطه $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ باشد این منحنی روی بازه $(\pi, \pi + T)$ چند نقطه عطف دارد؟

جواب:

$$y = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} \rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

با رسم نمودار تابع $\tan \frac{x}{2}$ یک نقطه عطف بدست می‌آید.

تمرین: در کدام ناحیه‌ی دستگاه محورهای مختصات تقعر نمودار تابع $y = x + \frac{1}{x}$ به سمت بالا است؟

تمرین: نقاط بحرانی $f(x) = x^2(x - 2)^2$ را پیدا کنید.

۱۴ - طول نقطه عطف نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 1 \circ x^{\frac{2}{3}}$ چند است؟

جواب:

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} \rightarrow f''(x) = \frac{1}{9}x^{\frac{-1}{3}} + \frac{2}{9}x^{\frac{-4}{3}}$$

$$= \frac{1}{9} \left(\frac{x+2}{x^{\frac{4}{3}}} \right)$$

و از آنجا که f'' فقط در $x = -2$ تغییر علامت می‌دهد پس طول نقطه عطف -2 است.

تمرین: تقعر نمودار تابع با ضابطه $y = x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}$ در بازه (a, b) رو به پایین است بیشترین مقدار $b - a$ چند است؟

تمرین: تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 6x^5 - 5x^4 + 2x + 7$ در بازه $(a, +\infty)$ رو به بالا است، کمترین مقدار a چند است؟

۱۵- تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2+9}{x^2+12}$ در بازه (a, b) رو به بالا است، بیشترین مقدار $b - a$ چند است؟

جواب:

$$f(x) = \frac{x^2 + 12 - 12}{x^2 + 12} = 1 - \frac{12}{x^2 + 12} \rightarrow f'(x) = \frac{6x}{(x^2 + 12)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6(x^2 + 12)^2 - 6x(2x)(2(x^2 + 12))}{(x^2 + 12)^4} = \frac{6(x^2 + 12)((x^2 + 12) - 4x^2)}{(x^2 + 12)^4}$$

$$\frac{f''(x) > 0 \Rightarrow \text{تقعر نمودار رو به بالا}}{\rightarrow -12x^2 + 12 > 0 \rightarrow x \in (-2, 2) \rightarrow b-a = 2 - (-2) = 4}$$

تمرین: مجموعه طول نقاط عطف نمودار تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & ; x \geq -1 \\ -13 - \frac{9}{x} & ; x < -1 \end{cases}$$

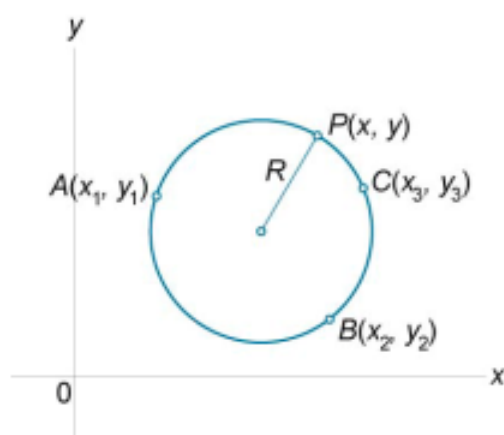
چيست؟

تمرین: طول نقطه عطف منحنی به معادله $y = \frac{x}{1 + |x|}$ ، چند است؟

فصل ۱۸

دایره، بیضی و سهموی

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

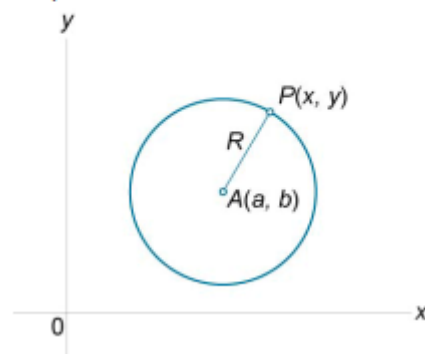


$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (A \text{ nonzero}, D^2 + E^2 > 4AF).$$

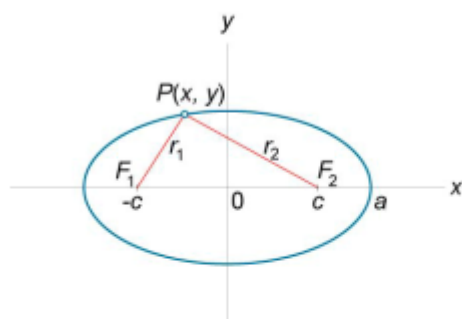
$$a = -\frac{D}{2A}, \quad b = -\frac{E}{2A}.$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$



$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{A}}$$

$$r_1 + r_2 = 2a,$$



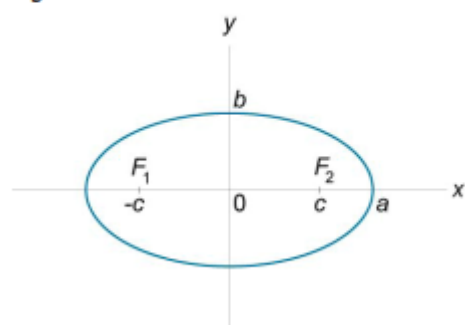
$$a^2 = b^2 + c^2$$

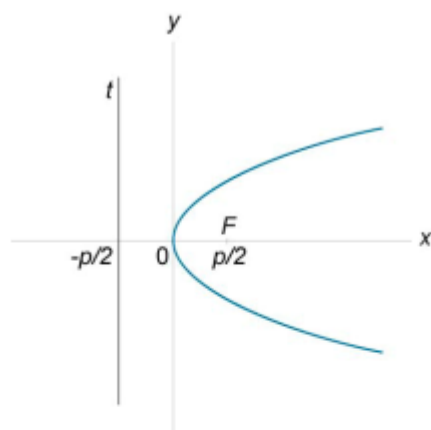
$$e = \frac{c}{a} < 1$$

$$x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c}$$

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$





$$x = -\frac{p}{2},$$

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right),$$

$$M(0, 0).$$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

$$B^2 - 4AC = 0.$$

$$y = ax^2, \quad p = \frac{1}{2a}.$$

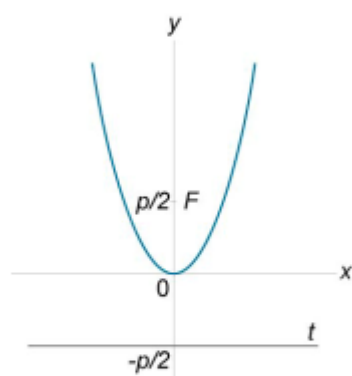
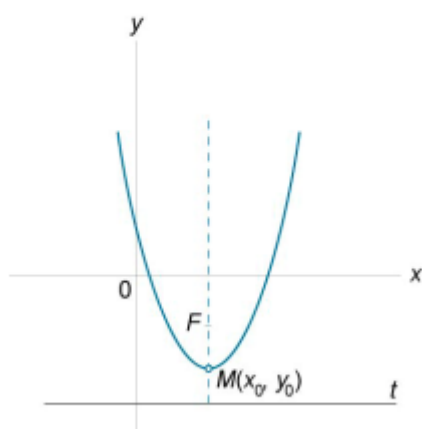
$$y = -\frac{p}{2},$$

$$F\left(0, \frac{p}{2}\right),$$

$$M(0, 0).$$

$$F\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right),$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$



$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{ (A, E nonzero),}$$

$$y = ax^2 + bx + c, p = \frac{1}{2a}.$$

$$y = y_0 - \frac{p}{2},$$

۱- شیب خط قائم بر بیضی به معادله $x^2 + 3y^2 - 8x = 0$ در نقطه برخورد آن بیضی با نیمساز ناحیه اول و در این ناحیه چند است؟

جواب:

$x = y \rightarrow x^2 + 3x^2 - 8x = 0 \rightarrow x = 0$ یا $x = 2$ معادله خط نیمساز ناحیه اول

در ناحیه اول (مدنظر سؤال) $\rightarrow x = 2$

$$-\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x - 8}{6y} \xrightarrow{x=y=2} -\frac{2(2) - 8}{6(2)} = \frac{1}{3}$$

فرمول شیب خط عمود $\rightarrow m = -3$

$$\frac{1}{3}m = -1$$

۲- دو بردار a و b به طول‌های ۵ و ۸ واحد مفروض‌اند. مساحت مثلث تولیدشده توسط این دو بردار ۱۲ واحد مربع است. اگر زاویه بین دو بردار کمتر از قائمه باشد، اندازه تفاضل بین دو بردار چند است؟

جواب:

$$\text{مساحت مثلث تولیدشده} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \Rightarrow 12 = \frac{1}{2} (5)(8)(\sin \theta)$$

$$\rightarrow \sin \theta = \frac{3}{5} \xrightarrow[\theta < \frac{\pi}{2}]{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1} \cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 25 + 64 - 64 = 25 \xrightarrow{|\vec{a} - \vec{b}| > 0} |\vec{a} - \vec{b}| = 5$$

۳- حجم محدود به صفحه به معادله $x + y + 2z = 1$ و صفحات مختصات کدام است؟

جواب: با بدست آوردن نقاط تقاطع داریم:

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, \frac{1}{2})$$

پس طبق فرمول:

$$\text{حجم محدود} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{12}$$

۴- فاصله دو کانون مقطع مخروطی به معادله $x^2 + xy + y^2 = 6$ چند است؟

جواب: در معادله $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = F$ با قرار دادن

$$M := \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$$

فرم استاندارد معادله بصورت $k_1 x^2 + k_2 y^2 = F$ است که در آن k_1 و k_2 ریشه‌های معادله زیر هستند:

$$k^2 - (A + C)k + |M| = 0$$

پس با توجه به اینکه در این سؤال $A = B = C = 1$ داریم:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}$$

پس

$$k^2 - 2k + \frac{3}{4} = (k - \frac{3}{2})(k - \frac{1}{2})$$

پس فرم استاندارد بصورت زیر است:

$$\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 6 \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$$

پس

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = 12 - 4 = 8 \rightarrow c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \rightarrow \text{فاصله دو کانون} = 2c = 4\sqrt{2}$$

۵- طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطه $A(-1, 0)$ ، $B(3, 0)$ و $C(0, -3)$ می‌گذرد، چند است؟

جواب: معادله دایره در حالت کلی بصورت زیر است:

$$x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$$

و چون این دایره از سه نقطه $A(-1, 0)$ ، $B(3, 0)$ و $C(0, -3)$ گذشته است پس

$$1 - a + c = 0, \quad 9 + 3a + c = 0, \quad 9 - 3b + c = 0$$

پس

$$a = -2, \quad b = 2, \quad c = -3$$

و طبق فرمول:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 12} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

۶- دهانه سهمی به معادله $y^2 + a(x - y) = 0$ رو به راست باز می‌شود و فاصله کانون تا خط هادی آن ۲ واحد است. مختصات کانون این سهمی چیست؟

جواب:

$$2p = 2 \rightarrow p = 1, \quad y^2 - ay = -ax \xrightarrow{p=1} -a = 4 \rightarrow a = -4$$

$$y^2 + 4y = 4x \rightarrow (y + 2)^2 = 4(x + 1) \rightarrow S(-1, -2) \rightarrow F(0, -2)$$

۷- دو خط به معادلات $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{-1}$ و $(x=t, y=t+2, z=-2t-1)$ نسبت به هم کدام وضعیت را دارند؟

جواب: این دو خط موازی یا عمود برهم نیستند پس یا متقاطع اند یا متناظر

$$\frac{t-1}{2} = \frac{t+2-4}{3} = \frac{-2t-1}{-1} \rightarrow t = -1$$

پس متقاطع هستند.

۸- صفحه شامل دو خط موازی $(x=2t+1, y=t-1, z=t)$ و $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟

جواب: معادله صفحه بصورت زیر است:

$$a(x)+b(y)+c(z-2)=0 \xrightarrow{(3,0,1), (1,-1,0), (-1,-2,-1)} a=1, b=-5, c=3$$

$$\rightarrow 1(x)-5(y)+3(z-2)=0 \xrightarrow{y=z=0 \rightarrow \text{محور } x \text{ ها}} \rightarrow x-5y+3z-6=0 \rightarrow x=6$$

تمرین: دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13$ و $x^2 + y^2 + 2x = 1$ در دستگاه مختصات رسم کنید.

تمرین: خط به معادله $y=1$ محور تقارن و خط $x=2$ خط هادی در یک سهمی اند. اگر این سهمی از نقطه $(3, 2)$ بگذرد، فاصله کانون تا خط هادی آن کدام است؟

۹- دسته خطوط به معادلات $(m+2)y + (m+1)x + 1 = 0$ قطرهای یک دایره اند. اگر این دایره از نقطه $(5, 2)$ بگذرد، شعاع آن چقدر است؟

جواب: مرکز دایره محل تقاطع این خطوط است، پس:

$$\xrightarrow{m=-2} x = 1, \xrightarrow{m=-1} y = -1 \rightarrow (1, -1) \text{ مرکز دایره}$$

$$r = \sqrt{(5-1)^2 + (2-(-1))^2} = 5$$

۱- سهمی با کانون $F(1, 1)$ و خط هادی به معادله $x = 3$ محور y ها را در دو نقطه A و B قطع می کند، فاصله AB چند است؟

جواب:

$$F = (\alpha + a, \beta) = (1, 1), \alpha - a = 3 \rightarrow \alpha = 2, a = -1, \beta = 1 \rightarrow (y-1)^2 = -4(x-2)$$

$$x = 0, y = 1 \pm 2\sqrt{2} \rightarrow A(0, 1-2\sqrt{2}), B(0, 1+2\sqrt{2}) \rightarrow |AB| = 4\sqrt{2}$$

تمرین: طول قطعه مماسی که از نقطه‌ی $A(4, 1)$ بر دایره‌ای به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 2x + 3 = 0$ رسم شود برابر چند است؟

راهنمایی: ابتدا مرکز را به نقطه A وصل کنید، سپس با توجه به قضیه فیثاغورس و اینکه شعاع در نقطه تماس بر مماس عمود است، طول خط مماس را بدست آورید.

تمرین: تعداد نقاطی از صفحه مختصات که درون دایره‌ای به معادله‌ی $x^2 + y^2 = 16$ قرار داشته و هر دو مختص آن نقاط عددی صحیح باشند، چند است؟

۱۱- به ازای کدام مقدار a دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$ بر خط $x + 3y = 0$ مماس است؟

جواب:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = (x-1)^2 + (y+2)^2 = -a+5 \rightarrow O = (1, -2), r = \sqrt{-a+5}$$

$$r = \text{فاصله مرکز تا خط مماس} = \frac{|1 + 3(-2)|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \sqrt{\frac{10}{4}}$$

$$r = \sqrt{-a+5} = \sqrt{\frac{10}{4}} \rightarrow -a+5 = \frac{10}{4} \rightarrow a = \frac{5}{2}$$

تمرین: کانون‌های بیضی به معادله $2x^2 + 7y^2 - 4x = 12$ دو سر قطری از دایره‌اند، این دایره نیمساز ناحیه اول را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱۲- دایره به مرکز $(2, 0)$ و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادله‌ی $y = 1$ را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

جواب: فاصله مرکز دایره از خط مماس همان شعاع دایره است و از آنجا که معادله نیمساز ربع اول، $y - x = 0$ است، پس

$$r = \frac{|-2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$$

پس باید فاصله‌ی آن نقاط روی دایره با عرض ۱ نیز از مرکز $\sqrt{2}$ باشد، پس:

$$\sqrt{2} = \sqrt{(x-2)^2 + (1-0)^2} \rightarrow x = 3 \text{ یا } x = 1$$

تمرین: در سهمی به معادله‌ی $2y = x^2 - 6x + 8$ معادله خط هادی چیست؟

۱۳- نقطه‌ی $M(x, y)$ بر روی بیضی به معادله‌ی $8 = 9y^2 + 4x^2 - 8x$ قرار دارد. مجموع فواصل نقطه‌ی M از دو کانون بیضی چند است؟

جواب: پاسخ همان قطر بزرگ است، پس:

$$9y^2 + 4x^2 - 8x = 8 \rightarrow 9y^2 + 4(x-1)^2 = 12 \rightarrow \frac{y^2}{\frac{12}{9}} + \frac{(x-1)^2}{3} = 1$$

$$a^2 = 3 \xrightarrow{a>0} a = \sqrt{3} \rightarrow 2a = 2\sqrt{3}$$

۱۴- در بیضی به معادله $1 = x^2 + 2y^2 - 2x$ اندازه وترى که از کانون بیضی بر قطر بزرگ آن عمود شود، چند است؟

جواب: می‌دانیم طول وتر عمود بر قطر بزرگ که از کانون بگذرد برابر است با: $\frac{2b^2}{a}$ ، پس:

$$(x-1)^2 + 2y^2 = 1 \rightarrow \frac{(x-1)^2}{1} + y^2 = 1 \rightarrow a = \sqrt{2}, b = 1 \rightarrow \frac{2b^2}{a} = \sqrt{2}$$

تمرین: اگر $a = (1, -2, 3)$ و $b = (2, 0, 1)$ ، مساحت متوازی الاضلاع تولیدشده توسط دو بردار $a + 3b$ و $2a + 5b$ ، چند است؟

۱۵- دو دایره از نقطه $(2, 1)$ گذشته و بر محورهای مختصات مماس‌اند، شعاع این دایره‌ها چند است؟

جواب: در این دایره‌ها شعاع همان فاصله مرکز با محورهای مختصات است و از آنجا که شعاع

دایره همیشه ثابت است پس فاصله مرکز از محور طول‌ها با فاصله مرکز از محور عرض‌ها برابر است، در نتیجه طول و عرض مرکز این دایره‌ها یکی است:

$$r^2 = (r - 2)^2 + (r - 1)^2 \rightarrow r = 1 \text{ یا } r = 5$$

۱۶- بیشترین مساحت از بین مثلث‌هایی که یک رأس آن روی بیضی به معادله $4x^2 + y^2 - 4x = 3$ و دو رأس دیگر آن کانون‌های این بیضی باشند، چند است؟

جواب:

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 3 + 1 = 4 \rightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = 2^2 - 1^2 = 3 \rightarrow c = \sqrt{3} \xrightarrow{S = \frac{rbc}{r}} S = \sqrt{3}$$

تمرین: در سهمی به معادله $y^2 + 4y + 2x + 1 = 0$ ، معادله خط هادی چیست؟

فصل ۱۹

بردارها



فصل ۲۰

ماتریس‌ها

